Rappel problème

Rappels caractéristiques

		Prix,	Poids, Volume
•	or	$3\times$ 10000\$,	8kg, 6litres
•	billets	$1\times$ 10000\$,	3kg, 6litres
•	max :		20kg, 32l

Solution heuristique : l'or d'abord

- $2\times$ or $+ 1\times$billets
- Profit$= 2\times 3 + 1\times 1 = 7$

Rappel problème

Rappels caractéristiques

		Prix,	Poids, Volume
•	or	$3\times$ 10000\$,	8kg, 6litres
•	billets	$1\times$ 10000\$,	3kg, 6litres
•	max :		20kg, 32l

Solution heuristique : l'or d'abord

- $2\times$ or + $1\times$billets
- Profit$= 2\times 3 + 1\times 1 = 7$

Relaxation linéaire : Intuition

Rappels caractéristiques

		Prix,	Poids, Volume
•	or	$3\times$ 10000\$,	8kg, 6litres
•	billets	$1\times$ 10000\$,	3kg, 6litres
•	max :		20kg, 32l

Solution heuristique : l'or d'abord

- $2 \times$ or $+ 1\times$billets$\rightarrow$ $7\times$10000\$

Peut-il espérer un profit beaucoup plus important que 7 ?

- Si on pouvait fondre l'or, la solution optimale serait de prendre le maximum d'or : 2.5 lingots !

$\Longrightarrow$ Valeur optimale relaxée : 7.5

$\Longrightarrow$ Le profit de 7 est optimal en nombre entiers !

Rappels caractéristiques

	Prix,	Poids, Volume
• or	$3\times$ 10000\$,	8kg, 6litres
• billets	$1\times$ 10000\$,	3kg, 6litres
• max :		20kg, 32l

Solution heuristique : l'or d'abord

- $2\times$ or + $1\times$billets $\rightarrow$ $7\times$10000\$

Peut-il espérer un profit beaucoup plus important que 7 ?

- Si on pouvait fondre l'or, la solution optimale serait de prendre $\boxed{\text{le maximum d'or}}$: 2.5 lingots !

$\Longrightarrow$ Valeur optimale relaxée : 7.5

$\Longrightarrow$ Le profit de 7 est optimal en nombre entiers !

Relaxation linéaire : Intuition

Rappels caractéristiques

	Prix,	Poids, Volume
• or	$3\times$ 10000\$,	8kg, 6litres
• billets	$1\times$ 10000\$,	3kg, 6litres
• max :		20kg, 32l

Solution heuristique : l'or d'abord

- $2 \times$ or + $1\times$billets$\rightarrow$ $7\times$10000\$

$\boxed{\text{Peut-il espérer un profit beaucoup plus important que 7 ?}}$

- Si on pouvait fondre l'or, la solution optimale serait de prendre $\boxed{\text{le maximum d'or}}$: 2.5 lingots !

$\Longrightarrow$ Valeur optimale relaxée : 7.5

$\Longrightarrow$ Le profit de 7 est optimal en nombre entiers !

Relaxation linéaire : modèle mathématique

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + x_2 &\quad \leftarrow \text{prix : or=300000\$ billets :100000\$} \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 &\quad \leftarrow \text{Limite de poids} \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 &\quad \leftarrow \text{Limite de volume} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ &\quad \leftarrow \text{Contraintes d'intégralité} \end{aligned}$$

- Ce type de programmes est difficile en nombre entiers à cause de l'explositon combinatoire !

  Mais il serait facile si les variables n'étaient $\boxed{\text{pas}}$ entières.

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + x_2 & \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 & \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 & \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ &\quad \leftarrow \text{Pas d'intégralité} \Longrightarrow \text{Facile !} \end{aligned}$$

Optimum fractionnaire → optimum entier ? ?

$$\max 3x_1 + x_2$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

Le point rouge est la solution optimale du programme continu ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$).

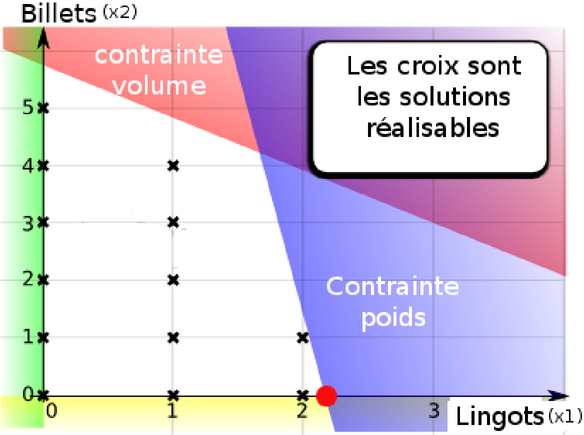
De l'optimum fractionnaire vers une solution entière

Trouver l'optimum fractionnaire (continu) et prendre le point entier le plus proche $\implies (x_1, x_2) = (2, 0)$, pas optimal en nb ent.

Optimum fractionnaire → optimum entier ? ?

$$\max 3x_1 + x_2$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

Le point rouge est la solution optimale du programme continu ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$).



De l'optimum fractionnaire vers une solution entière

Trouver l'optimum fractionnaire (continu) et prendre le point entier le plus proche $\implies (x_1, x_2) = (2, 0)$, pas optimal en nb ent.

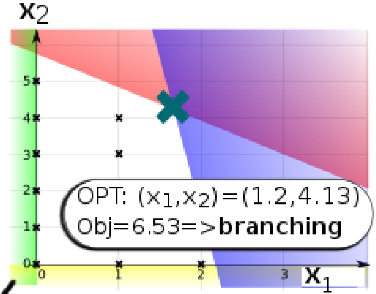
1. Difficulté des problèmes de nature discrète et explosion combinatoire

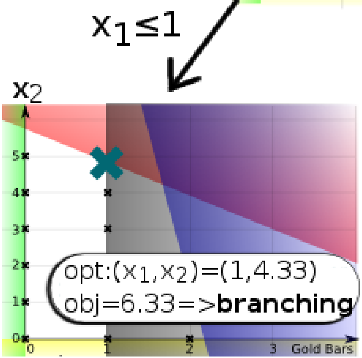
2. Méthodes de résolution en optimisation discrète
   - La relaxation linéaire et les bornes associées
   - Méthode à base de coupes
   - L'algorithme Branch-and-Bound (séparation et évaluation)

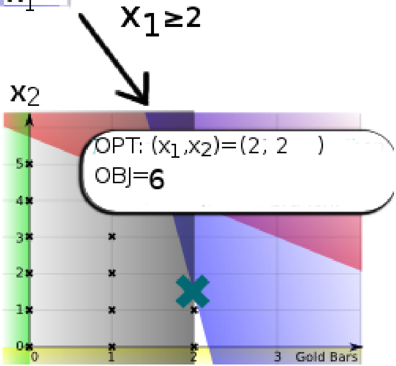
3. Exemples problèmes résolus avec `glpsol` (avec correction)

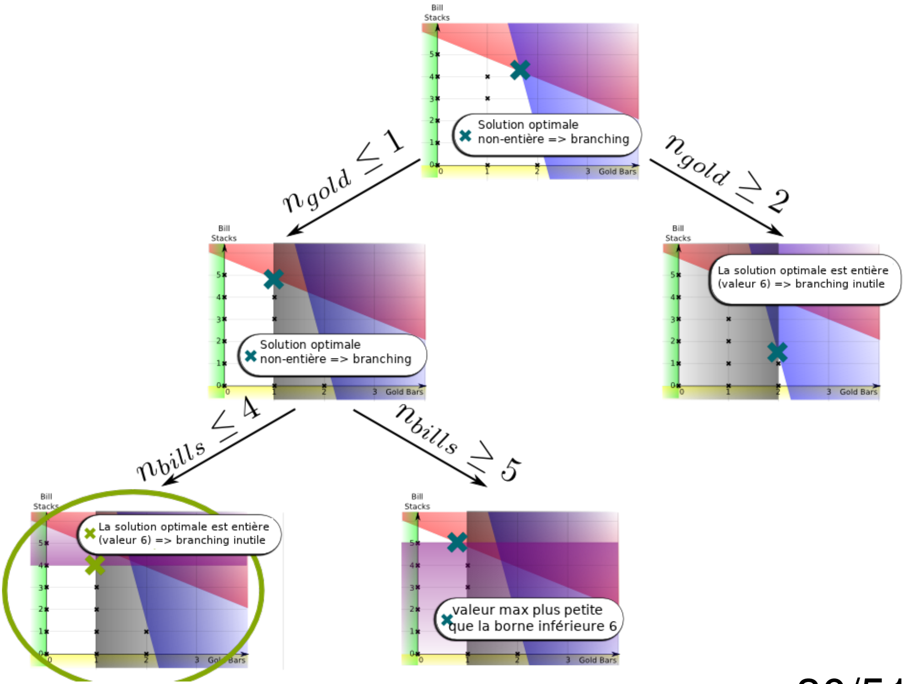
Exemple
Branch & Bound
(séparation&évaluation)

$$\max 2x_1 + x_2$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 22$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$








Bill Stacks
Gold Bars
Solution optimale non-entière => branching
$n_{gold} \leq 1$
$n_{gold} \geq 2$
Solution optimale non-entière => branching
La solution optimale est entière (valeur 6) => branching inutile
$n_{bills} \leq 4$
$n_{bills} \geq 5$
La solution optimale est entière (valeur 6) => branching inutile
valeur max plus petite que la borne inférieure 6

$$\max 3x_1 + x_2$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 22$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

À partir de la solution optimale fractionnaire $(x_1, x_2) = (\frac{22}{8}, 0)$ de profit $3\frac{22}{8} = 8.25$, on considère deux cas :

- $x_1 = 2$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (2, \frac{6}{4})$ de valeur $6 + 1.5 = 7.5$
  - $x_2 = 1$ Valeur : 7
  - $x_2 = 0$ Valeur : 6
- $x_1 \leq 1$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (1, \frac{14}{4})$ de valeur $3 + 3.5 = 6.5 \longrightarrow$ on coupe toute la branche !

Exercice *Branch and Bound*

$$\max 3x_1 + x_2$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 22$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

À partir de la solution optimale fractionnaire $(x_1, x_2) = (\frac{22}{8}, 0)$ de profit $3\frac{22}{8} = 8.25$, on considère deux cas :

- $x_1 = 2$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (2, \frac{6}{4})$ de valeur $6 + 1.5 = 7.5$
  - $x_2 = 1$ Valeur : 7
  - $x_2 = 0$ Valeur : 6
- $x_1 \leq 1$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (1, \frac{14}{4})$ de valeur $3 + 3.5 = 6.5 \implies$ on coupe toute la branche !

Exercice *Branch and Bound*

$$\max 3x_1 + x_2$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 22$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

À partir de la solution optimale fractionnaire $(x_1, x_2) = (\frac{22}{8}, 0)$ de profit $3\frac{22}{8} = 8.25$, on considère deux cas :

- $x_1 = 2$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (2, \frac{6}{4})$ de valeur $6 + 1.5 = 7.5$
  - $x_2 = 1$ Valeur : 7
  - $x_2 = 0$ Valeur : 6
- $x_1 \leq 1$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (1, \frac{14}{4})$ de valeur $3 + 3.5 = 6.5 \implies$ on coupe toute la branche !

Exercice *Branch and Bound*

$$\max 3x_1 + x_2$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 22$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

À partir de la solution optimale fractionnaire $(x_1, x_2) = (\frac{22}{8}, 0)$ de profit $3\frac{22}{8} = 8.25$, on considère deux cas :

- $x_1 = 2$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (2, \frac{6}{4})$ de valeur $6 + 1.5 = 7.5$
  - $x_2 = 1$ Valeur : 7
  - $x_2 = 0$ Valeur : 6
- $x_1 \leq 1$ optimum fractionnaire : $(x_1, x_2) = (1, \frac{14}{4})$ de valeur $3 + 3.5 = 6.5 \implies$ on coupe toute la branche !

Problème du ... ?...

$$\max c^\top x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$
$$x_i \in \{0,1\}$$

- n articles $\{1, 2, \ldots n\}$
- n poids $a_1, a_2, \ldots a_n$,
- n valeurs (prix) $c_1, c_2, \ldots c_n \oplus$ une capacité b
- on veut maximiser le cout des articles choisis

Variables de décision

$x_i = 1$ si l'article i est sélectionnée, 0 sinon

Exemple : $a = [4, 3, 2, 1]$, $c = [44, 30, 20, 15]$ et $b = 6$

Comment comparer ce modèle avec $\boxed{\text{sa relaxation linéaire}}$?

Problème du sac à dos

$$\begin{aligned} \max c^\top x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- n articles $\{1, 2, \ldots n\}$
- n poids $a_1, a_2, \ldots a_n$,
- n valeurs (prix) $c_1, c_2, \ldots c_n \oplus$ une capacité b
- on veut maximiser le cout des articles choisis

Variables de décision

$x_i = 1$ si l'article i est sélectionnée, 0 sinon

Exemple : $a = [4, 3, 2, 1]$, $c = [44, 30, 20, 15]$ et $b = 6$

Comment comparer ce modèle avec $\boxed{\text{sa relaxation linéaire}}$?

Problème du sac à dos

$$\begin{aligned} \max c^\top x = \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- n articles $\{1, 2, \ldots n\}$
- n poids $a_1, a_2, \ldots a_n$,
- n valeurs (prix) $c_1, c_2, \ldots c_n$ $\oplus$ une capacité b
- on veut maximiser le cout des articles choisis

Variables de décision

$x_i = 1$ si l'article i est sélectionnée, 0 sinon

Exemple : $a = [4, 3, 2, 1]$, $c = [44, 30, 20, 15]$ et $b = 6$

Comment comparer ce modèle avec $\boxed{\text{sa relaxation linéaire}}$?

Examples de code à imprimer

```
var x1>=0;
var x2>=0;
maximize obj:3*x1+x2;
subject to fixer_x1: x1=2;
subject to c1: 8*x1+3*x2<=20;
subject to c2: 6*x1+6*x2<=32;
solve;
display obj,x1,x2;
end;
~
~
~
~
~
~
~
~
~
~
~
~
~
slide7.mod      9,4         All
```

```
param n, >0, integer;
param a{1..n}, integer;
param c{1..n}, integer;
param b;
var x{1..n}, >=0, binary;
maximize obj: sum{i in 1..n} c[i]*x[i];
s.t. poids_max: sum{i in 1..n} a[i]*x[i]<=b;
solve;
display obj;
for {i in 1..n}{ printf "%g ", x[i]; }
data;
param n:=4;
param b:=6;
param a:= 1  4
          2  3
          3  2
          4  1 ;
param c:= 1  44
          2  30
          3  20
          4  15 ;
end;
slide29-sac-a-dos.mod
```