Cnam
Master Parisien de Recherche Opérationnelle

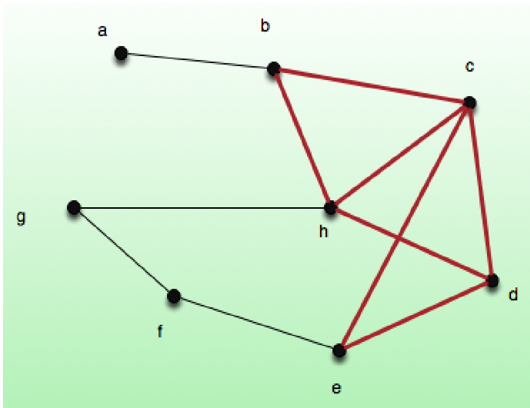
---

Programmation Mathématique Avancée.

# Programmation Quadratique

**Exercice 1 — *Le problème du k-cluster***

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ non orienté ayant $n$ sommets, et $m$ arêtes, le problème du $k$-cluster consiste à déterminer le sous graphe de $G$ le plus dense possible de $k$ sommets,i.e. le sous-graphe $G_S = (S, E_S)$ de $k$ sommets avec le plus d'arrêtes possible.




Solution pour $k = 5$
Source : wikipedia

1. Proposez une formulation quadratique du $k$-cluster, notée $(QP)$.
2. Proposer 2 linéarisations de $(QP)$. Indiquer pour chacune la taille des formulations.

En notant $\bar{E}$ l'ensemble des arêtes n'appartenant pas à $E$, ie. son complémentaire dans le graphe complet, le problème du $k$-cluster peut aussi consister à minimiser le nombre d'arêtes manquantes dans le sous graphe par rapport à un sous graphe complet de $k$ arêtes.

1. Proposez une autre formulation quadratique du $k$-cluster, notée $(QP')$.
2. Proposer 2 linéarisations de $(QP')$. Indiquer pour chacune la taille des formulations.
3. Dans quels cas la formulation $(QP')$ est-elle plus intéressante que la formulation $(QP)$ ?
4. Implémenter une reformulation linéaire de chaque modélisation et comparer sur les instances proposées.

**Exercice 2 — *Cas où les variables sont des entiers naturels***

Dans cette exercice, nous considérons le problème de l'équipartition en variables entières (Integer Equipartition Problem (IEP)). Ce problème consiste à partitionner les sommets d'un graphe en une collection d'ensembles disjoints de mêmes tailles, tout en minimisant le somme des poids des arêtes qui se trouvent à l'interieur du même ensemble.

Plus précisément, nous considérons $n$ types d'objets, $m$ objets de chaque type, et une partition des $n \cdot m$ objets en $p$ ensembles tous de mêmes tailles. Nous supposons que $n \cdot m$ est un multiple de $p$. Pour toute paire de types d'objets $(i, j)$, $i \leqslant j$, on note $c_{ij}$ le coût d'allouer chaque paire d'élements de types $i$ et $j$ à des ensembles différents. Le problème consiste donc à minimiser le coût total de l'allocation des $n \cdot m$ objets aux $p$ ensembles.

Nous introduisons les variables de décision $x_{ik}$ qui représentent le nombre d'objets de type $i$ alloués à l'ensemble $k$, (IEP) peut être formulé comme suit :

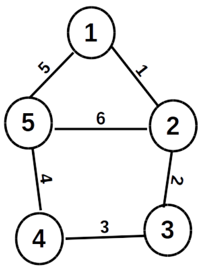
$$(IEP)\begin{cases} \min \ \displaystyle\sum_{i<j}\sum_{k\neq l} c_{ij}x_{ik}x_{jl} + \sum_{i}\sum_{k<l} c_{ii}x_{ik}x_{il} & \\ \text{s.t.} & \\ \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \frac{n \cdot m}{p} & 1 \leq k \leq p \qquad (1) \\ \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = m & 1 \leq i \leq n \qquad (2) \\ \quad 0 \leqslant x_{ik} \leqslant \min(m, \dfrac{n \cdot m}{p}) & 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p \qquad (3) \\ \quad x_{ik} \in \mathbb{N} & 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p \qquad (4) \end{cases}$$

On remarque que les contraintes (1) assurent qu'exactement $\frac{n \cdot m}{p}$ objets sont alloués à chaque ensemble, les constraintes (2) assurent que tous les objets sont bien affectés à un ensemble. Ce problème a une fonction objectif quadratiques, $n+p$ égalités linéaires et $n \cdot p$ variables entières.

1. Proposez une reformulation linéaire de ce problème.
2. A l'aide de `ampl`, implémentez cette reformulation et résolvez les instances disponibles en ligne.

**Exercice 3 — *MaxCut sur un exemple***

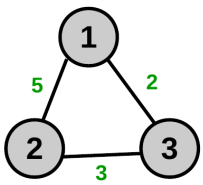
Considérons le graphe $G = (V, E)$ suivant de 5 sommets et 6 arêtes :




1. Ecrire la matrice $W$ des poids de $G$, et donner la formulation $(MC_{0,1})$ pour ce graphe. A l'aide de `ampl-cplex` résoudre $(MC_{0,1})$.
2. Donner la formulation $(MC_{-1,1})$ pour $G$.
3. Ecrire la matrice Laplacienne $L$ de $G$, et donner la formulation $(MC_L)$ pour $G$.
4. Ecrire la formulation SDP de max-cut pour $G$, et donner sa relaxation.
5. Combien d'inégalités triangulaires peut-on ajouter à $R - SDP_{MC}$ pour le graphe $G$ ?
6. A l'aide de `ampl`, et `csdp` resoudre la relaxation sdp $(R - SDP_{MC})$. Ajoutez à cette relaxation les inégalités triangulaires et resolvez $(SDP - T_{MC})$. Résolvez les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?

**Exercice 4 — *QCR sur le QAP***

Soit l'instance du QAP qui correspond au graphe suivant :



et aux données suivantes :

— Flux entre les équipements $i$ et $j$ : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

— Distance entre les sites $k$ et $l$ : $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

— Coût d'affectation nul : $C = 0$

1. Donnez la formulation de Lawer, ainsi que la formulation $(SDP_{QCR})$ associée.
2. A l'aide de `ampl`, résoudre pour le QAP par la linéarisation classique. Résolvez ensuite les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?
3. A l'aide de `ampl`, et de `csdp` résoudre pour le QAP la relaxation $(SDP_{QCR})$, récupérez ensuite les variables duales optimales et convexifiez le $(QAP)$ avec la méthode QCR. Résolvez ensuite les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?