Optimisation Conique - La programmation semi-définie

Amélie Lambert

Cnam

MPRO

Les ensembles convexes

Les ensembles convexes

- Un ensemble C est **convexe** si et seulement si pour tous points x et y dans C, le segment connectant x et y est inclu dans C

  Exemples : les cubes, les boules ou les ellipsoides

- Pour utiliser les ensembles convexes dans des algorithmes il faut pouvoir les représenter en machine :
  - description implicite par l'intersection de demi-espaces,
  - description explicite de la combinaison convexe de ses points extrêmes

- Ici, nous allons parler de programmation conique, nous parlerons de cônes convexes.

  Exemples de cônes convexes pour l'optimisation : $\mathbb{R}^n_+$, cône des matrices semi-definie positives ou le cônes des matrices copositives

Contexte

- On travaille dans un espace euclidien E, de n dimensions muni d'un produit scalaire : ici $\mathbb{R}^n$

- Pour les vecteurs colonnes $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire est

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Topologie dans les espaces métriques : définitions (1/2)

- On définit la **boule de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r** comme

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, d(x, y) \leq r\}$$

- Si $A \subset \mathbb{R}^n$, un point $x \in A$ est un **point intérieur** si il existe un rayon $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subseteq A$

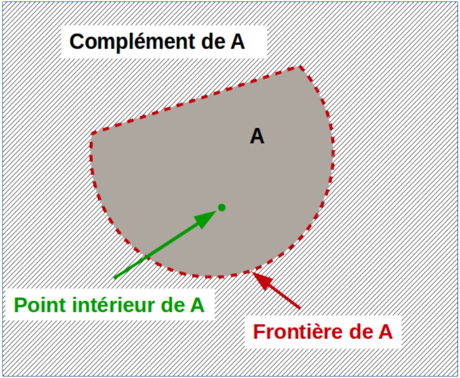
- On note $\mathrm{int}\ A$ l'ensemble des points intérieurs de A, et on dit que A est **ouvert** si tous les points de A sont intérieurs.

- L'ensemble A est **fermé** si sont complément $\mathbb{R}^n \backslash A$ est ouvert.

Topologie dans les espaces métriques : définitions (2/2)

- La **fermeture** de A, notée $\bar{A}$, est l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est donc le plus petit fermé contenant A.
- Un point x appartient à la **frontière** de A, notée ∂A, si pour tout $\epsilon > 0$, la boule $B(x, \epsilon)$ a des points dans A et dans son complément $\mathbb{R}^n \backslash A$.
- La **frontière** ∂A est un ensemble fermé et nous avons $\bar{A} = A \cup \partial A$ et $\partial A = \bar{A} \backslash \text{int } A$.
- L'ensemble A est **compact** si et seulement si il est fermé et borné. (i.e. il peut être contenu dans une boule suffisamment grande mais de rayon fini).

Topologie dans les espaces métriques : Illustration



Ensembles convexes : définitions (1/4)

- Le **segment entre les points** x **et** y est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de x et y, il est défini par les points z :

$$[x, y] = \{z = (1 - \alpha)x + \alpha y \ : \alpha \text{ élément de } [0, 1]\}$$

- Un ensemble C est **convexe** si et seulement si pour tous points x et y dans C, le segment connectant x et y est inclu dans C

- Toute **intersection** d'ensembles convexes est un **ensemble convexe**.

Ensembles convexes : définitions (2/4)

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in C \subseteq \mathbb{R}^n$, une **combinaison convexe** des x_i est un point p de la forme :

$$p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

- Un **sous-ensemble convexe est stable aux combinaisons convexes** :

$$\forall \tilde{n} \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_{\tilde{n}} \in C \subseteq \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n}}, \text{ tq } \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \alpha_i = 1,$$

$$\text{on a } p = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \alpha_i x_i \in C$$

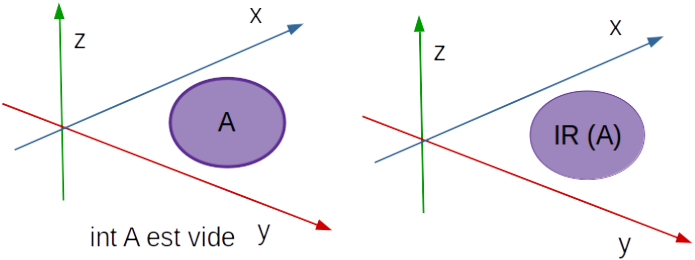
Ensembles convexes : définitions (3/4)

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. Un point $x \in C$ est dans l'**intérieur relatif** de C si et seulement si

$$\forall y \in C, \exists z \in C, \alpha \in]0,1[: x = \alpha y + (1-\alpha) z$$

En d'autres termes, c'est l'intérieur de C relativement au sous-espace affine engendré par C.

Exemple : Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$
$\forall x \in A, \nexists \epsilon > 0 \text{ tq } B(x,\epsilon) \subseteq A$, (car $z = 0$) $\Rightarrow \text{int } A = \emptyset$



Ensembles convexes : définitions (4/4)

- L'**enveloppe convexe** de $A \in \mathbb{R}^n$ (notée $\mathrm{conv}\ A$) est le plus petit ensemble convexe contenant A.

- C'est l'ensemble des combinaisons convexes des points $x_1, \ldots, x_{\tilde{n}}$, $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de leurs barycentres à coefficients positifs :

$$\mathrm{conv}\ A = \left\{ p = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \alpha_i x_i \ : \tilde{n} \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_{\tilde{n}} \in C, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n}},\ \mathrm{tq} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \alpha_i = 1 \right\}$$

- L'**enveloppe convexe** d'un ensemble fini de points est appelé **polytope** (ou **polygone** en 2 dimensions).

Description implicite : intersection de demi-espaces (1/2)

- Un **hyperplan H** correspondant au vecteur normal $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et passant par $x \in \mathbb{R}^n$ est :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ c^T x = \beta\}$$

  c'est un sous-espace affine de dimension $n - 1$.

- L'hyperplan H divise $\mathbb{R}^n$ en 2 **demi-espaces fermés** :

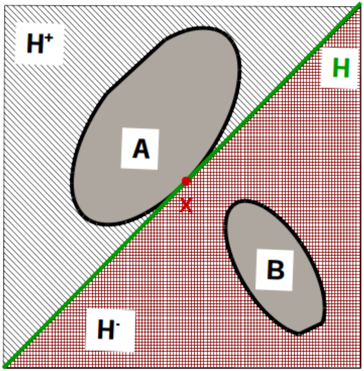
$$H^+ = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ c^T y \geq c^T x = \beta\} \text{ et } H^- = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ c^T y \leq c^T x = \beta\}$$

- H sépare $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $B \subseteq \mathbb{R}^n$ si $A \subseteq H^+$ et $B \subseteq H^-$ (ou inversement).
  i.e. si $\exists c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \beta \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in A, y \in B \ : \ c^T x \leq \beta \leq c^T y$

- Si les deux inégalités sont strictes, la séparation est dite **stricte**.

Description implicite : intersection de demi-espaces (2/2)

- H est le **support de A en x**, si $x \in A$, $x \in H$ et A est contenu dans un des 2 sous-espaces H^+ ou H^-.
- Alors on dit que H^+ (ou H^-) est le **demi-espace support**.



Exemple : L'hyperplan H supporte A en x et sépare A et B

Projection orthogonale

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un espace convexe et fermé. Il est possible de projeter tous les points x de $\mathbb{R}^n$ sur C : on prend le point de C qui est le plus proche de x.

- Soit $x \in \mathbb{R}^n \backslash C$ (x est extérieur à C), $\exists ! \pi_C(x) \in C$, qui est le plus proche de x. De plus, $\pi_C(x) \in \partial C$.
- La **projection** $\pi_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ est caractérisée par la propriété

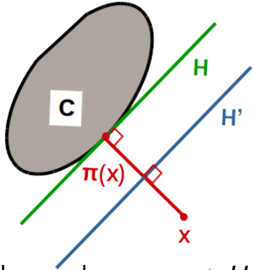
$$\forall y \in C \ : \ d(\pi_C(x), x) \leq d(y, x)$$

- Pour tout $y \in \partial C$, il y a un point x extérieur à C, tel que $y = \pi_C(x)$

Hyperplans supports et séparateurs

Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un espace convexe et fermé, $x \in \mathbb{R}^n \backslash C$, $\pi_C(x) \in C$ la projection de x sur C, on a :

1. l'hyperplan H qui passe par x avec comme normale $x - \pi_C(x)$ supporte C en $\pi_C(x)$ et donc sépare $\{x\}$ et C.
2. l'hyperplan H' qui passe par $(x + \pi_C(x))/2$ avec comme normale $x - \pi_C(x)$ sépare strictement $\{x\}$ et C.



Donc on peut construire un hyperplan support H sur chaque point $x \in \partial C$.
$\Rightarrow$ description implicite de l'ensemble convexe.

Description explicite : ensemble des points extrêmes (1/2)

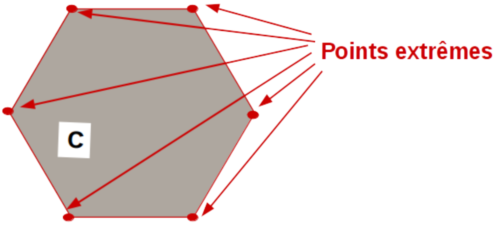
Définition : un point $x \in C$ est un **point extrême** si pour tout segment s de C, x n'est pas un point de l'intérieur relatif de s.

i.e. : si on ne peut pas écrire x sous la forme $x = (1-\alpha)y + \alpha z$, avec $y, z \in C$ et $0 < \alpha < 1$.

On note $\mathrm{ext}\ C$ l'ensemble de tous les points extrêmes de C.

Propriété : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et convexe, alors

$$C = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}\ C)$$



Les points extrêmes d'un ensemble convexe.

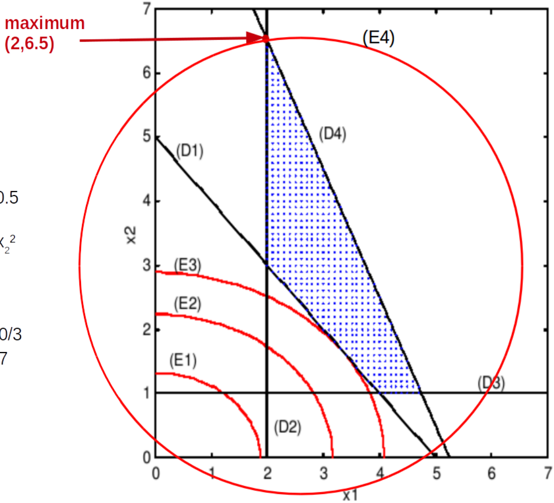
Description explicite : ensemble des points extrêmes (2/2)

Application : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ compact et convexe, et $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ continue et convexe, alors $\max_{x \in C} f(x)$ a un maximum qui est un point extrême de C.

(D1) : $x_1 + x_2 \leq 5$
(D2) : $x_1 \geq 2$
(D3) : $x_2 \geq 1$
(D4) : $2x_1 + x_2 \leq 10.5$

$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 4\,x_2^2$

(E1) : $f(x_1,x_2) = 7$
(E2) : $f(x_1,x_2) = 20$
(E3) : $f(x_1,x_2) = 100/3$
(E2) : $f(x_1,x_2) = 177$



Les cônes convexes

Les cônes convexes (1/4)

- Un ensemble non vide $K \subset \mathbb{R}^n$ est un **cône convexe** si et seulement si il est stable par rapport aux combinaisons linéaires positives :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \forall x, y \in K \ : \ \alpha x + \beta y \in K$$

- Un cône convexe est **pointé** s'il ne contient pas de droite :

$$x \in K \cup -x \in K \Rightarrow x = 0$$

- Le **dual** K^* d'un cône K est défini de la façon suivante :

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ x^T y \geq 0, \ \forall x \in K\}$$

K^* est un cône fermé et convexe.

Les cônes convexes (2/4)

Un **cône convexe, fermé, pointé avec un intérieur non vide** $K \subset \mathbb{R}^n$ défini un ordre partiel sur $\mathbb{R}^n$, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$:

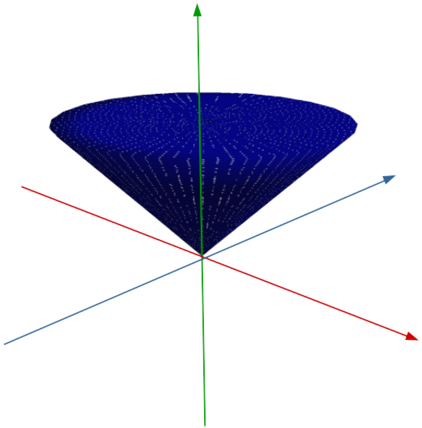
$$x \succeq y \Longleftrightarrow x - y \in K$$

- Cet ordre partiel satisfait les conditions suivantes :
  1. Reflexifité : $\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ x \succeq x$
  2. Anti-symmetrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ x \succeq y, \ y \succeq x \Longrightarrow x = y$
  3. Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \ : \ x \succeq y, \ y \succeq z \Longrightarrow x \succeq z$
  4. Homogénéité : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \ : \ x \succeq y, \Longrightarrow \alpha x \succeq \alpha y$
  5. Additivité : $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n \ : \ x \succeq y, \ x' \succeq y' \Longrightarrow x + x' \succeq y + y'$

- On défini l'inégalité stricte par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ x \succ y \Longleftrightarrow x - y \in \mathrm{int} \ K$$

Les cônes convexes (3/4)

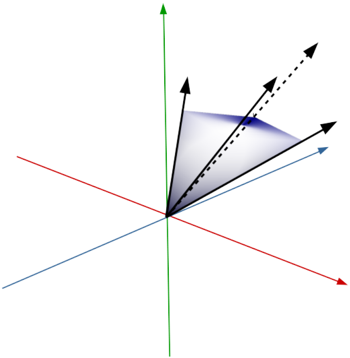


Exemple de cône qui n'est pas une combinaison conique d'un nombre fini de vecteurs.

Les cônes convexes (4/4)

Le cône convexe généré par un ensemble de vecteurs $A \subset \mathbb{R}^n$ est le plus petit cône convexe contenant A :

$$\text{cône } A = \{p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ n \in \mathbb{N},\ x \in A,\ \alpha \in \mathbb{R}^n_+\}$$

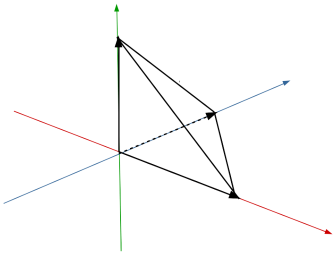


Exemple de cône généré par la combinaison conique des 4 vecteurs noirs

Exemple : $\mathbb{R}^n_+$

$\mathbb{R}^n_+$ est un cône pointé et convexe, il est défini par :

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \; : \; x_1, \ldots, x_n \geq 0\}$$



Le cône $\mathbb{R}^3_+$: un polyèdre.

Pour le PL suivant :

$$(PL) \begin{cases} \max c^T x \\ \text{s.t.} \\ Ax \succeq b \end{cases}$$

l'ordre partiel $x \succeq y$ signifie $x_i \geq y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

Théorème de décomposition spectrale

Toute matrice $X \in \mathcal{S}^n$ (ensemble des matrices symétriques de dimension n) peut être décomposée comme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont les **valeurs propres** de X, et les $u_i \in \mathbb{R}^n$ les **vecteurs propres** associés, formant une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Matriciellement, $X = PDP^T$, où $D = diag(\lambda)$ est la matrice diagonale dont les éléments non-nuls sont les λ_i, et P la matrice orthogonale dont les colonnes sont les u_i.

Sous-matrices principales et symétriques, mineurs

- Définition : Soit $X \in \mathcal{S}^n$, on appelle **sous-matrice symétrique** de X toute sous matrice de X obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de X en même nombre et de mêmes indices.
  Ex : $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, ordre 2 : $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$,
  ordre 1 : (3) (1) (2)
- Définition : Soit $X \in \mathcal{S}^n$, on appelle **sous-matrice principale** de X toute sous matrice symétrique de X obtenue en supprimant les dernières lignes et les dernières colonnes de X.
  Ex : $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, ordre 2 : $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, ordre 1 : (3)
- Définition : On appelle **mineur symétrique (ou principal)**, le determinant d'une sous-matrice symétrique (ou principale).

Matrices semi-définies positives

Soit une matrice $X \in \mathcal{S}^n$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est **semi-définie positive (SDP)**, noté $X \succeq 0$, si
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^T X x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} x_i x_j = \langle X, xx^T \rangle \geq 0$$
2. La plus petite valeur propre de X est positive ou nulle.
3. Tous les mineurs symétriques de X sont positifs ou nuls.
4. Décomposition de Cholesky : Pour $k \geq 1$, il existe une matrice triangulaire inférieure $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tel que $X = LL^T$

Matrices semi-définies positives : exemple

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Les valeurs propres de X sont $(0, 4, 3)$.
3. Mineurs symétriques :
   - Mineur symétrique d'ordre 3 :
     $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \geq 0$
   - Mineurs symétriques d'ordre 2 :
     $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \geq 0$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$
   - Mineurs symétriques d'ordre 1 : $|3| = 3 \geq 0$, $|3| = 3 \geq 0$, $|1| = 1 \geq 0$.

$\Longrightarrow$ La matrice X est semi-définie positive.

Matrices semi-définies positives : exemple

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Décompositions de Choleski non unique :
   - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = LL^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = L'L'^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ La matrice X est semi-définie positive.

Matrices définies positives

Soit une matrice $X \in \mathcal{S}^n$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est **définie positive (DP)**, noté $X \succ 0$, si
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^T X x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} x_i x_j = \langle X, xx^T \rangle > 0$$
2. La plus petite valeur propre de X est strictement positive.
3. Tous les mineurs principaux de X sont strictement positifs.
4. Décomposition de Cholesky : pour $k \geq 1$, il existe une unique matrice triangulaire inférieure $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ inversible tel que $X = LL^T$.

Matrices définies positives : exemple

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Les valeurs propres de X sont $(0.13, 3.2, 4.7)$.
3. Mineurs symétriques :
   - Mineur symétrique d'ordre 3 :
     $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$
   - Mineur principaux d'ordre 2 :
     $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0$
   - Mineurs principaux d'ordre 1 : $|4| = 4 > 0$

$\Longrightarrow$ La matrice X est définie positive.

Matrices définies positives : exemple

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Décomposition de Choleski unique :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = LL^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2\sqrt{11}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ La matrice X est définie positive.

Produit tensoriel de deux vecteurs

- Définition : Soient les vecteurs $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, on définit le produit tensoriel de deux vecteurs :

$$u \otimes v = uv^T = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

- Propriété : uv^T n'est pas symétrique, et $u \otimes v$ n'est pas commutatif.

  Exemple : Soient $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a :

  $u \otimes v = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $v \otimes u = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Remarques

1. Si X est SDP et $X_{ii} = 0$, alors $X_{ij} = X_{ji} = 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$
2. Si X est une matrice diagonale, elle est SDP, si tous ces éléments diagonaux sont positifs ou nuls (ses valeurs propres)
3. Si de plus ils sont tous strictement positifs, alors elle est DP.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \otimes x = xx^T = \begin{pmatrix} x_1^2 & \ldots & x_1x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & \ldots & x_n^2 \end{pmatrix}$ est SDP.

Le produit scalaire et la trace

- La **trace d'une matrice** $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est $\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} X_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- Propriétés
  - $\mathrm{Tr}(\lambda X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$
  - $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
  - $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$
  - $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
- On définit le **produit scalaire** : $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}$

Matrices par blocs

- **Définition** : Soient les matrices $X_i \in \mathcal{S}^{n_i}$, $\forall i = 1, \ldots, r$, $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_r$ est la **matrice par blocs** suivante :

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_r = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & X_r \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $X \succeq 0$ si et seulement si $X_i \succeq 0$, $\forall i = 1, \ldots, r$

Le cône des matrices semi-définie positives

- On note $\mathcal{S}_+^n \subset \mathcal{S}^n$ le cône convexe des matrices SDP $\mathcal{S}_+^n \subset \mathcal{S}^n$:

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n : X \text{ est sdp, i.e } \forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ x^T X x \geq 0\}$$

- C'est bien un cône convexe puisque :
  $\forall \alpha, \beta > 0$ et $(X, Y) \in (\mathcal{S}_+^n)^2$, on a
  $x^T(\alpha X + \beta Y)x = \alpha x^T X x + \beta x^T Y x \geq 0$, et donc $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{S}_+^n$.

- Soit $X \in \mathcal{S}_+^n$, $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$ avec $\lambda_i \geq 0$, le cône des matrices SDP est généré par les matrices de rang 1 :

$$\mathcal{S}_+^n = \text{ cône } \{xx^T \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

- A l'intérieur du cône $\mathcal{S}_+^n$ se trouvent les matrices définies positives.

Le dual du cône des matrices SDP

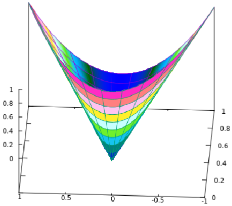
- Le dual de S_+^n est :

$$(S_+^n)^* = \left\{ B \in S^n \,:\, \langle A, B\rangle \geq 0,\ \forall A \in S_+^n \right\}$$

- Théorème : Le cône $\mathcal{S}_+^n$ coïncide avec son dual : $(\mathcal{S}_+^n)^* = \mathcal{S}_+^n$, i.e. $A \succeq 0 \Longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{S}_+^n \,:\, \langle A, B\rangle \geq 0$

  Exercice : preuve

Exemple : Le cône des matrices $\mathcal{S}_+^2$



Le cône des matrices $X \in \mathcal{S}_+^2$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \succeq 0$$
$$\iff x \geq 0, z \geq 0, xz - y^2 \geq 0$$

La programmation semi-définie

- La **programmation semi-définie (SDP)** est une extension de la programmation linéaire (LP).
- La SDP a été étudiée pour la première fois dans les années 60.
- Un problème SDP est un programme dont l'objectif est linéaire en les termes de la matrice variable X et dont les contraintes sont également linéaires en les termes de cette matrice.

Inégalités matricielles linéaires (LMI)

Définition : Soient $A_i \in \mathcal{S}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, une **inegalité matricielle linéaire**

est de la forme : $g(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i \succeq A_0$

Exemple : Soient 2 réels x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, et l'inégalité matricielle suivante :

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est équivalent à : $\begin{pmatrix} x_2+1 & x_1 & 1 \\ x_1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \succeq 0$

ou bien encore à l'infinité d'inégalités : $\forall v \in \mathbb{R}^3$,

$$v^T \begin{pmatrix} x_2+1 & x_1 & 1 \\ x_1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} v \geq 0$$

Inégalités matricielles linéaires (LMI)

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i - A_0 \succeq 0$$

$g(x)$ caractérise un ensemble convexe, qui est l'ensemble $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) \succeq 0\}$$

$\mathcal{C}$ est dans l'intersection d'un espace affine et du cône des matrices semi-définies positives.

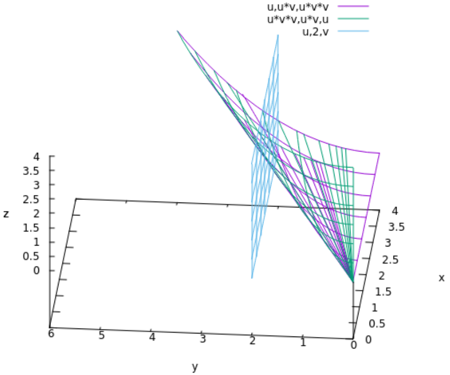
$\mathcal{C}$ n'est en général pas un polytope pour $n \geq 2$

Inégalités matricielles linéaires (LMI) : exemple

Dans $\mathcal{S}^2_+$, on cherche les matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \succeq 0$ telles que $y = 2$, i.e. :

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & z \end{pmatrix} \succeq 0 \iff x \geq 0, z \geq 0, xz \geq 4$$

Ce sont celles qui sont à l'intersection du cône $\mathcal{S}^2_+$ et de l'hyperplan $y = 2$.



Le problème primal semi-défini

Soient $Q, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{S}^n$, et $b \in \mathbb{R}^m$, le primal (SDP) s'écrit :

$$(SDP)\begin{cases} \max f(X) = \langle Q, X \rangle \\ \text{s.t.} \\ \quad g_r(X) = \langle A_r, X \rangle = b_r \quad \forall r = 1, \ldots, m \\ \quad X \succeq 0 \end{cases}$$

Les contraintes $g_r(x)$ indiquent la structure de la matrice X.

rappel : $\forall A, B \in \mathcal{S}^n,\ \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

Exemple : un problème primal SDP (1/2)

$$
(Ex_1)\begin{cases}
\min \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X \right\rangle \\
\text{s.t.} \\
\qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 2 \\
\qquad X \succeq 0
\end{cases}
\qquad
(Ex_1)\begin{cases}
\min X_{11} + X_{22} \\
\text{s.t.} \\
\qquad X_{12} + X_{21} = 2 \\
\qquad X \succeq 0
\end{cases}
$$

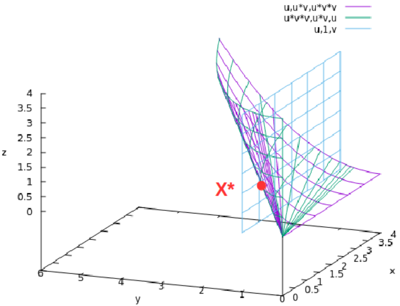
Ce qui est équivalent au problème :

$$
(Ex_1)\begin{cases}
\min X_{11} + X_{22} \\
\text{s.t.} \\
\qquad \begin{pmatrix} X_{11} & 1 \\ 1 & X_{22} \end{pmatrix} \succeq 0
\end{cases}
$$

Exemple : un problème primal SDP (2/2)

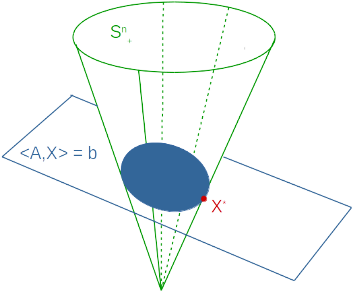
$$(Ex_1)\begin{cases} \min X_{11} + X_{22} \\ \text{s.t.} \\ \quad \begin{pmatrix} X_{11} & 1 \\ 1 & X_{22} \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est la matrice $X^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de valeur 2.



Le problème primal SDP : géométrie

La matrice optimale X^* se trouve à l'intersection de l'hyperplan $\langle A, X\rangle = b$ et du cône $\mathcal{S}_+^n$ des matrices SDP



Exemple de région admissible pour un programme SDP

Problème primal non nécessairement borné

- Le problème SDP peut ne pas être borné.
- Exemple : Soient un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, et la famille de problèmes (Ex^α)

$$(Ex^\alpha)\begin{cases} \max X_{11} \\ \text{s.t.} \\ \qquad \begin{pmatrix} X_{11} & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

  - $\det(X) = -\alpha^2$ et donc la région admissible de (Ex^α) est vide si $\alpha \neq 0$.
  - Lorsque $\alpha = 0$, (Ex^α) admet une solution admissible, mais pas de solution strictement admissible.

  La valeur optimale est $+\infty$, (Ex^α) est non borné.

- En cas de minimisation de la fonction objectif, la valeur optimale est 0 avec la solution $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Optimum non nécessairement atteint

- La valeur optimale d'un problème SDP peut ne pas être atteinte
- Exemple

$$(SDP)\begin{cases} \min X_{11} \\ \text{s.t.} \\ \quad \begin{pmatrix} X_{11} & 1 \\ 1 & X_{22} \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

La valeur optimale est 0 dont la solution est $X_{11} = \frac{1}{X_{22}}$, avec $X_{22} \to +\infty$, et elle n'est donc jamais atteinte.

Programmation SDP et Programmation Linéaire

Considérons un programme SDP où :

- $Q, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{S}^n$ sont des matrices diagonales, dont les éléments diagonaux sont les vecteurs q et a_r $(r = 1, \ldots, m)$, $b \in \mathbb{R}^m$,
- la matrice variable X est diagonale, et ses termes diagonaux sont les éléments du vecteur x

Le problème SDP s'écrit

$$(SDP_d)\begin{cases} \max \langle q, x \rangle \\ \text{s.t.} \\ \quad \langle a_r, x \rangle = b_r \\ \quad x \succeq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad (PL)\begin{cases} \max q^T x \\ \text{s.t.} \\ \quad a_r^T x = b_r \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

La programmation SDP inclut donc la programmation linéaire.

Le problème dual SDP

Soit $\beta \in \mathbb{R}^m$ les variables duales de (SDP), le dual $(DSDP)$ est :

$$(SDP)\begin{cases} \max f(X) = \langle Q, X \rangle \\ \text{s.t.} \\ \quad g_r(X) = \langle A_r, X \rangle = b_r \leftarrow \beta_r \\ \quad X \succeq 0 \end{cases} \qquad (DSDP)\begin{cases} \min h(\beta) = \langle b, \beta \rangle \\ \text{s.t.} \\ \quad \displaystyle\sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - S = Q \\ \quad \beta \in \mathbb{R}^m \\ \quad S \succeq 0 \end{cases}$$

Remarques :

- $\displaystyle\sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q$ doit appartenir à $\mathcal{S}_+^n$
- la matrice S joue ici le rôle d'une variable d'écart.

Exemple : le problème dual SDP

$$(Ex_1)\begin{cases} \min X_{11} + X_{22} \\ \text{s.t.} \\ \quad \begin{pmatrix} X_{11} & 1 \\ 1 & X_{22} \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

$$(Ex_1)\begin{cases} \max -\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X \rangle \\ \text{s.t.} \\ \quad \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X \rangle = 2 \leftarrow \beta \\ \quad X \succeq 0 \end{cases}$$

$$(DEx_1)\begin{cases} \min 2\beta \\ \text{s.t.} \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \\ \quad \beta \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Dual d'un SDP, relation avec le Lagrangien

$$(SDP) : \max_X \{\langle Q, X\rangle : \langle A_r, X\rangle = b_r, r = 1, \dots, m\,,\, X \succeq 0\}$$

On introduit pour chaque contrainte β_r, son Lagrangien est :

$$\mathcal{L}(X,\beta) = \langle Q, X\rangle - \sum_{r=1}^{m} \beta_r(\langle A_r, X\rangle - b_r) = \langle b, \beta\rangle - \langle \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q, X\rangle$$

dont la fonction duale est : $L(\beta) = \max_{X\succeq 0} \langle b, \beta\rangle - \langle \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q, X\rangle$

et son dual Lagrangien est : $(DL) = \min_{\beta\in\mathbb{R}^m} \max_{X\succeq 0} \langle b, \beta\rangle - \langle \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q, X\rangle$

Or, $\max_{X\succeq 0} \mathcal{L}(X,\beta) = \begin{cases} \langle b, \beta\rangle \text{ ssi } (\sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q) \succeq 0 \\ \infty \text{ sinon} \end{cases}$

Donc : $(DL) = \min_{\beta\in\mathbb{R}^m} \{\langle b, \beta\rangle : (\sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q) \succeq 0\}$ qui est exactement $(DSDP)$

Admissibilité et admissibilité stricte

- Admissibilité :
  - **primale :** Une matrice $X \succeq 0$ est réalisable pour (SDP) ssi :

$$\langle A_r, X\rangle = b_r \;\; r = 1, \ldots, m.$$

  - **duale :** Le vecteur $\beta \in \mathbb{R}^m$ est réalisable pour $(DSDP)$ ssi

$$\sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q \succeq 0.$$

- Admissibilité stricte :
  - **primale :** Une matrice $X \succ 0$ est strictement réalisable pour (SDP) ssi

$$\langle A_r, X\rangle = b_r \;\; r = 1, \ldots, m.$$

  - **duale :** Le vecteur $\beta \in \mathbb{R}^m$ est strictement réalisable pour $(DSDP)$ ssi

$$\sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q \succ 0.$$

Saut de dualité - Dualité faible et forte

Etant donné X et β solutions réalisables de (SDP) et $(DSDP)$, la différence entre les valeurs des objectifs de (SDP) et $(DSDP)$ est appelée le **saut de dualité**. Il est donné par :

$$\langle b, \beta \rangle - \langle Q, X \rangle$$

Dualité faible : Etant donné X et β solutions réalisables de (SDP) et $(DSDP)$ alors

$$\langle Q, X \rangle \leq \langle b, \beta \rangle$$

Dualité forte : Si pour X et β solutions admissibles de (SDP) et $(DSDP)$, le saut de dualité vaut 0, alors il y a dualité forte et X et β sont les valeurs optimales de (SDP) et $(DSDP)$. Et on a :

$$\langle b, \beta \rangle - \langle Q, X \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle X, \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q \rangle = 0$$

Cependant, il n'y a pas nécessairement dualité forte en SDP.

Dualité faible et forte : exemple [Vandenberghe and Boyd]

$$(SDP_{ex})\begin{cases} \max -X_{12} \\ \text{s.t.} \\ \quad \begin{pmatrix} 0 & X_{12} & 0 \\ X_{12} & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1+X_{12} \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

$$(DSDP_{ex})\begin{cases} \min \beta_1 \\ \text{s.t.} \\ \quad \begin{pmatrix} \beta_2 & \frac{1-\beta_1}{2} & \frac{\beta_3}{2} \\ \frac{1-\beta_1}{2} & 0 & \frac{\beta_4}{2} \\ \frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_4}{2} & \beta_1 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

Exercice : Retrouvez ce dual et montrer quel est le saut de dualité

Certificat de saut de dualité nul (conditions de Slater)

Théorème : Soient $p^* =$ la valeur optimale de (SDP) et d^* la valeur optimale de $(DSDP)$

1. si (SDP) admet une solution strictement réalisable et p^* *fini*, alors $p^* = d^*$ et cette valeur est atteinte pour $(DSDP)$
2. si $(DSDP)$ admet une solution strictement réalisable et d^* *fini*, alors $p^* = d^*$ et cette valeur est atteinte pour (SDP)
3. si (SDP) et $(DSDP)$ ont des solutions strictement réalisables alors $p^* = d^*$ et cette valeur est atteinte pour les deux problèmes.

Conditions d'optimalité

Pour les problèmes à dualité forte, nous avons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité suivantes :

$$
(OPT)\begin{cases}
g_r(X) = \langle A_r, X\rangle - b_r = 0 & \forall r,\ X \succeq 0 \text{ (admissibilité du primal)}\\
\displaystyle\sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - S = Q & \beta \in \mathbb{R}^m \text{ (admissibilité du dual)}\\
SX = 0 & \text{complémentarité de } X \text{ et } S\\
S \succeq 0, X \succeq 0 &
\end{cases}
$$

Quels algorithmes pour résoudre (SDP)

- **Méthode des points intérieurs** (implementations CSDP, SeDuMi, SDPA).
  En général ne sont pas capables de résoudre des instances de dimension supérieures à 1000 ou de plus de 10000 contraintes.
- **Méthode des faisceaux spectraux** basée sur l'optimisation des valeurs propres (implementations Spectral Bundle)
  L'idée est d'exploiter le fait que $X \succeq 0 \Longleftrightarrow \lambda_{min}(X) \geq 0$
- **Méthodes des faisceaux** (callable Conic Bundle library)
  Permet de résoudre des instances significativement plus grandes, doit être bien paramétrée car sa convergence peut-être très longue.
- D'autres classes de méthodes comme les **algorithmes du lagrangien augmenté**.

Algorithmes des points intérieurs

Les méthodes de points intérieurs - Principe

- Méthodes développées dans les années 90, il existe plusieurs variantes.
- La méthode primale-duale : On suppose que le primal (SDP) et le dual ($DSDP$) satisfont les conditions de Slater (saut de dualité nul).
- **Principe :** suivre un chemin central dans l'intérieur de la région admissible qui est obtenu en remplaçant les conditions d'optimalités par des conditions d'optimalités approchées

Méthodes de points intérieurs - Principe

- Idée : se débarasser de la contrainte difficile $X \succeq 0$
- Méthode : on pénalise l'objectif par une fonction barrière qui tend vers 0 à l'intérieur du cône $\mathcal{S}_+^n$ et vers l'infini ailleurs.

  $\Longrightarrow$ si on démarre d'une solution $X \succ 0$, on peut retirer les contraintes $X \succeq 0$ puisqu'elles seront forcées par la fonction barrière (on reste dans l'intérieur du cône $\mathcal{S}_+^n$).

Points intérieurs - Problème auxiliaire

Soit la fonction barrière : $B(X) = \begin{cases} \log(\det(X)) & X \succ 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque : On a bien pour $X \succ 0$, $\det(X) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$.

Pour $\mu \geq 0$, on définit le problème auxiliaire suivant :

$$(SDP_\mu) \begin{cases} \max f_\mu(X) = \langle Q, X \rangle + \mu \log(\det(X)) \\ \text{s.t.} \\ \quad g_r(X) = \langle A_r, X \rangle - b_r = 0 & \forall r = 1, \dots, m \\ \quad X \succ 0 \end{cases}$$

Lemme : $X \mapsto \log(\det(X))$ est strictement concave dans l'intérieur de $\mathcal{S}_+^n$, i.e. quand $X \succ 0$.

$\Longrightarrow$ Pour $\mu \geq 0$ fixé, la solution optimale X_μ^* de (SDP_μ) est unique.

Résoudre (SDP) avec son problème auxiliaire

Pour $\mu \to 0$, if faut que $\langle Q, X_\mu^* \rangle$ converge vers la valeur optimale de (SDP).

Nous allons :

1. Ecrire les CN de l'existence de X_μ^*, sous la forme d'un système que X_μ^* doit satisfaire. Ces conditions vont aussi impliquer la convergence de $\langle Q, X_\mu^* \rangle$ vers la valeur optimale de (SDP).

2. Observer que les CN sont aussi suffisantes : le système issu de (i) a une solution unique $X = X_\mu^*$

$\forall g_r(X) = 0$, nous associons un multiplicateur de lagrange $\beta_r \in \mathbb{R}$.

On considère ensuite le lagrangien :

$$\mathcal{L}_\mu(X, \beta) = \langle Q, X \rangle + \mu \log\left(\det\left(X\right)\right) - \sum_{r=1}^{m} \langle \beta_r, g_r(X) \rangle$$

Théorème de Lagrange : X^*_μ est un maximum (local) si :

- (i) $g_r(X^*_\mu) = 0$, pour tout r
- (ii) $\exists! \beta^* \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla \mathcal{L}_\mu(X^*_\mu, \beta^*) = \nabla f_\mu(X^*_\mu) + \sum_{r=1}^{m} \beta^*_r \nabla g_r(X^*_\mu) = 0$

Cela s'applique si :

1. si f_μ et g_r sont definies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$
2. si f_μ et g_r sont différentiables
3. les $\nabla g_r(X)$ sont indépendant (satisfait car les g_r sont des fonctions linéaires).

Etape (i) : CN de l'existence de X^*_μ

$$(SDP_\mu)\begin{cases} \max f_\mu(X) = \langle Q, X\rangle + \mu \log(\det(X)) \\ \text{s.t.} \\ \quad g_r(X) = \langle A_r, X\rangle - b_r = 0 & \forall r = 1, \dots, m \\ \quad X \succ 0 \end{cases}$$

Propriété : $\nabla \log(\det(X)) = (X^T)^{-1}$

Calculons $\nabla \mathcal{L}_\mu(X, \beta) = \nabla f_\mu(X) + \sum_{r=1}^{m} \beta_r \nabla g_r(X)$

- On a $\nabla \log(\det(X)) = (X^T)^{-1}$ et $\nabla\langle Q, X\rangle = \nabla \mathrm{Tr}(Q^T X) = Q^T$
- Donc $\nabla f_\mu(X) = Q^T + \mu(X^T)^{-1}$
- On a $\nabla g_r(X) = \nabla(\langle A_r, X\rangle - b_r) = \nabla(\mathrm{Tr}(A_r^T X) - b_r) = A_r^T$

On a donc $\nabla \mathcal{L}_\mu(X, \beta) = Q^T + \mu(X^T)^{-1} - \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r^T = 0$

CN d'optimalité pour (SDP_μ)

En introduisant la variable d'écart $S = \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r^T - Q^T = \mu(X^T)^{-1}$, on obtient les CN suivantes :

$$(OPT_\mu) \begin{cases} g_r(X) = \langle A_r, X \rangle = b_r & \forall r,\ X \succ 0 \text{ (admissibilité du primal)} \\ \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - S = Q & \beta \in \mathbb{R}^m, S \succ 0 \text{ (admissibilité du dual)} \\ SX = \mu I_n & \text{complémentarité de } X \text{ et } S \end{cases}$$

En fait, par rapport à (SDP), on a remplacé la dernière condition par $SX = 0$ par $SX = \mu I_n$, avec $\mu > 0$ et $\mu \to 0$.

Une interprétation primale duale

- Puisque X^*_μ satisfait (OPT_μ) si il existe, on peut en déduire que $f_\mu(X^*_\mu) = \langle Q, X^*_\mu \rangle + \mu \log\left(\det\left(X^*_\mu\right)\right)$ converges vers la valeur du problème initial (SDP) : $f(X) = \langle Q, X \rangle$ lorsque μ tend vers 0.

- En plus, on a une paire primale-duale (X, β, S) dont le saut de dualité dépend de μ :
  Si $(\hat{X}, \hat{\beta}, \hat{S})$ satisfont (OPT_μ), alors $\hat{X}$ est une solution strictement réalisable de (SDP), $(\hat{\beta}, \hat{S})$ est une solution strictement réalisable de $(DSDP)$ et le saut de dualité est :

$$\langle b, \hat{\beta} \rangle - \langle Q, \hat{X} \rangle = n\mu$$

Exercice : preuve

Une interprétation primale duale

- Du coup si nous pouvons calculer X_μ^* pour μ très petit, nous aurons une solution "presque" optimale de (SDP).

- De plus comme par la faible dualité, $\langle Q, X\rangle \leq \langle b, \beta\rangle$, la valeur de la solution $\langle Q, X_\mu^*\rangle$ sera au plus à $n\mu$ de la solution optimale de (SDP).

Etape (ii) : CS pour l'optimalité de X_μ^*

Supposons que (SDP) ait une solution intérieure $\hat{X} \succ 0$ et que son dual ($DSDP$) ait aussi une solution intérieure $\hat{\beta}$ telle que la matrice d'écart $\hat{S}$ satisfaisant $\hat{S} = \sum_{r=1}^{m} \beta_r A_r - Q$ soit définie positive (i.e. $S \succ 0$).

De plus si les A_r sont linéairement indépendantes, alors $\forall \mu \geq 0$, (SDP_μ) a une unique solution $X^* = X_\mu^*$, $\beta^* = \beta_\mu^*$ et $S^* = S_\mu^*$, et X_μ^* est l'unique maximum de f_μ sous les contraintes $g_r(X) = 0$ et $X \succ 0$

Méthode des points intérieurs : algorithme

Soient un point strictement réalisable $(X, \beta, S) = (X^0, \beta^0, S^0)$, et un $\epsilon > 0$

1. Calculer le μ courant : $\mu = \frac{SX}{n}$
2. Calculer les nouvelles directions de recherche pour le nouveau μ, i.e. calculer $(\Delta X, \Delta\beta, \Delta S)$ en résovant (OPT_μ) :

$$(OPT_\mu)\begin{cases} \langle A_r, X + \Delta X\rangle = b_r & \forall r,\ X \succ 0 \\ \sum_{r=1}^{m}(\beta_r + \Delta\beta_r)A_r - (S + \Delta S) = Q & \beta \in \mathbb{R}^m, S \succ 0 \\ (S + \Delta S)(X + \Delta X) = \mu I_n & \end{cases}$$

3. Calcul de la distance de recherche : Calculer les distances α_p et α_d telles que :

$$X + \alpha_p \Delta X \succ 0 \qquad S + \alpha_d \Delta S \succ 0$$

4. Mise à jour : $X = X + \alpha_p \Delta X$, $\beta = \beta + \alpha_d \Delta\beta$ et $S = S + \alpha_d \Delta S$
5. Si $SX < \epsilon$, s'arrêter.

Etape 2 : approximation des directions de recherche

Résolution du système :

$$(OPT_\mu)\begin{cases} \langle A_r, X+\Delta X\rangle = b_r & \forall r,\ X \succeq 0 \\ \sum_{r=1}^{m}(\beta_r+\Delta\beta_r)A_r - (S+\Delta S) = Q & \beta \in \mathbb{R}^m \\ (S+\Delta S)(X+\Delta X) = \mu I_n & \end{cases}$$

Les deux premières équations sont linéaires.
Approximer la troisième par une fonction linéaire (ici Helmberg et al. 96) :

$$\begin{aligned} \mu I_n &= (S+\Delta S)(X+\Delta X) \\ &= SX + S\Delta X + \Delta S X + \Delta S \Delta X \approx SX + S\Delta X + X\Delta S \end{aligned}$$

Remarque : même si X et S sont symétriques, le produit XS ne l'est pas forcément. Lorsque ça arrive, on considère la matrice $\hat{X}\hat{S} = \frac{SX+(SX)^T}{2}$.