Rappels sur les probabilités, les processus aléatoires et les chaînes de Markov

1 Rappels de probabilités

1.1 Dénombrement

Exercice 1 — *Jeu de carte* Trois cartes sont tirées d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités des événements suivants :

(i) Trois piques
(ii) Aucun pique
(iii) Un pique et deux "non-piques"
(iv) Au moins un pique
(v) Trois cartes de la même famille
(vi) Trois cartes de familles différentes
(vii) Trois as
(viii) Aucun as
(ix) Trois cartes rouges

lorsque :

(1) On suppose que les cartes sont, l'une après l'autre, tirées au hasard et remises dans le jeu.
(2) On suppose que les cartes sont tirées simultanément au hasard.

Exercice 2 — *Enveloppes et boîtes aux lettres* Soit n et p deux entiers non nuls.

(1) De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres ?
(2) En déduire le cardinal de l'ensemble $E_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + x \dots + x_n = p\}$.
(3) Supposons $p \geqslant n$. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres de sorte qu'aucune boîte aux lettres ne reste vide ?
(4) De quel ensemble E_2 (construit de façon similaire à E_1) peut-on en déduire le cardinal ?
(5) De combien de façons peut-on répartir p enveloppes distinctes dans n boîtes aux lettres ?

1.2 Indépendance

Exercice 3 — *Indépendance entre 3 événements* On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement A, B et C les événements "Le chiffre du premier dé est pair", "Le chiffre du deuxième dé est pair" et "Les deux chiffres ont même parité".

(1) Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
(2) Montrer que les événements A, B et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

1.3 Variables discrètes finies

Exercice 4 — *Loi d'un dé truqué* On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

(1) Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
(2) On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y , et son espérance.

Exercice 5 — *Garagiste* Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0,1 \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 0,3 \qquad \mathbb{P}(X = 2) = 0,4 \qquad \mathbb{P}(X = 3) = 0,2$$

(1) On note Z le nombre de voitures disponibles pour la location par jour. Déterminer la loi de Z.

(2) On pourra considérer dans la suite que X, Y et Z sont indépendantes. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.

2 Les processus aléatoires

Exercice 6 — *Résultats élémentaires sur la loi de Poisson* Soit un processus de Poisson de taux λ

1. Quelle est la probabilité que m évènements se produisent entre 0 et t ? Entre t et $2t$?
2. Calculer les probabilités pour qu'aucun évènement puis un seul se produisent entre t et $t + \Delta t$.
3. Calculer le nombre moyen d'évènements se produisant entre 0 et t.
4. Calculer la probabilité que l'intervalle entre deux évènements consécutifs dépasse une valeur θ quelconque.

Exercice 7 — *Processus de Poisson et circulation* Sur une route à sens unique, la circulation des voitures peut être décrite par un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \frac{1}{6}$. Un piéton qui veut traverser la route a besoin d'un intervalle d'au moins $4s$ entre 2 voitures successives. Calculer la probabilité pour qu'un piéton doive attendre avant de traverser.

Exercice 8 — *Arrivée des clients dans un magasin* Des clients arrivent dans un magasin au rythme de 3 à la minute en moyenne. On modélise les temps d'arrivée par un processus de Poisson.

1. Calculer la probabilité qu'il n'arrive qu'un seul client en 2 minutes.
2. Calculer la probabilité qu'il n'arrive aucun client en 5 minutes.

3 Les chaînes de Markov

Exercice 9 — *Classification des états d'une chaîne de Markov finie* Soit la chaîne de Markov définie par la matrice de transition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe associé.

2. Trouver les différentes classes d'états et leurs natures.
3. La chaîne comporte-t-elle une classe périodique ?

Exercice 10 — *Prévisions météo* Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de celà, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
3. Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

Exercice 11 — *Trajectoire sur un cercle* On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque voisin. Déterminer le graphe et la matrice de transition de la chaîne ainsi obtenue. Quelle est la période de ses états ?