Rappels sur les probabilités, les processus aléatoires et les chaînes de Markov

Amélie Lambert

Cnam

MPRO - Mise à niveau

Quelques rappels

Lors d'une expérience aléatoire, c'est-à-dire soumise au hasard, on définit :

- **L'univers** Ω qui est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire.
- **Un évènement** E qui est un sous-ensemble de résultats possibles pour cette expérience à l'intérieur de l'univers.
- **Le dénombrement d'un évènement** qui est le calcul du nombre de cas où l'évènement considéré peut se produire.
- **La probabilité d'un évènement** $\mathbb{P}$ qui correspond à la fréquence d'un évènement par rapport à l'ensemble des cas possibles. (nombre de cas où l'évènement considéré peut se produire sur le nombre total de cas)

Quelques exemples

Exemple 1

Soit une classe composée de 2 groupes :

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Expérience aléatoire : Tirer au hasard 2 étudiants.

Question : Quelle est la probabilité de l'évènement E : $\{$ tirages avec 1 étudiant (e) de chaque genre et 1 étudiant (e) de chaque groupe $\}$?

Exemple 1 : solution

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

$E = H \cup I$, où H ={la fille est du groupe 1} et I ={la fille est du groupe 2}

Exemple 1 : solution

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

$E = H \cup I$, où H ={la fille est du groupe 1} et I ={la fille est du groupe 2}

Il y a deux ordres possibles (fille en premier ou garçon en premier) :

1. Le nombre d'évènements qui commencent avec la fille en premier est $3 * 19 = 357$ dans H et $10 * 25 = 250$ dans I.
2. Le nombre d'évènements qui commencent avec le garçon en premier est $19 * 3 = 357$ dans H et $25 * 10 = 250$ dans I.

Exemple 1 : solution

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

$E = H \cup I$, où H ={la fille est du groupe 1} et I ={la fille est du groupe 2}

Il y a deux ordres possibles (fille en premier ou garçon en premier) :

1. Le nombre d'évènements qui commencent avec la fille en premier est $3 * 19 = 357$ dans H et $10 * 25 = 250$ dans I.

2. Le nombre d'évènements qui commencent avec le garçon en premier est $19 * 3 = 357$ dans H et $25 * 10 = 250$ dans I.

Comme H et I sont disjoints et $E = H \cup I$

$$\mathrm{card} E = \mathrm{card} H + \mathrm{card} I = 2 * 357 + 2 * 250 = 1214$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}} = \frac{1214}{56*57} = \frac{1214}{3192} = 0.38$$

Exemple 2

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Expérience aléatoire : Tirer au hasard 3 étudiants.

Question : Quelle est la probabilité de l'évènement $E = \{$ tirages avec exactement 1 fille et exactement 1 étudiant(e) du groupe 1 $\}$?

Exemple 2 : solution (1/3)

E : { 1 fille et exactement 1 du groupe 1 }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Soient :

- $E = \{$ tirages avec exactement 1 fille et exactement 1 étudiant(e) du groupe 1 $\}$
- H est le sous-ensemble de E formé des tirages dans lesquels la fille est du groupe 1.
- I est le sous-ensemble de E formé des tirages dans lesquels la fille est du groupe 2.

Exemple 2 : solution (2/3)

E : { 1 fille et exactement 1 du groupe 1 }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

- **Former un élément de H : sous-ensemble de E formé des tirages dans lesquels la fille est du groupe 1.**
  1. Choisir d'abord la fille dans le groupe 1
  2. Choisir un garçon dans le groupe 2
  3. Choisir un autre garçon (distinct du premier) dans le groupe 2
  4. Choisir l'ordre dans lequel ils vont sortir (il y en a autant que de permutations de 3 personnes, soit 6)

Exemple 2 : solution (2/3)

E : { 1 fille et exactement 1 du groupe 1 }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

- **Former un élément de H : sous-ensemble de E formé des tirages dans lesquels la fille est du groupe 1.**
  1. Choisir d'abord la fille dans le groupe 1
  2. Choisir un garçon dans le groupe 2
  3. Choisir un autre garçon (distinct du premier) dans le groupe 2
  4. Choisir l'ordre dans lequel ils vont sortir (il y en a autant que de permutations de 3 personnes, soit 6)

- **Former un élément de I : sous-ensemble de E formé des tirages dans lesquels la fille est du groupe 2.**
  1. Choisir d'abord la fille dans le groupe 2
  2. Choisir un garçon dans le groupe 1
  3. Choisir un garçon dans le groupe 2
  4. Choisir l'ordre dans lequel ils vont sortir (il y en a autant que de permutations de 3 personnes, soit 6)

Exemple 2 : solution (3/3)

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

E : { 1 fille et exactement 1 du groupe 1 }

Donc

$$\mathrm{card} H = 3 * 19 * 18 * 6 = 6156$$

$$\mathrm{card} I = 10 * 25 * 19 * 6 = 28500$$

Exemple 2 : solution (3/3)

E : { 1 fille et exactement 1 du groupe 1 }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Donc

$$\mathrm{card} H = 3 * 19 * 18 * 6 = 6156$$

$$\mathrm{card} I = 10 * 25 * 19 * 6 = 28500$$

Comme H et I sont disjoints et $E = H \cup I$,

$$\mathrm{card} E = \mathrm{card} H + \mathrm{card} I = 6156 + 28500 = 34656$$

Exemple 2 : solution (3/3)

E : { 1 fille et exactement 1 du groupe 1 }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Donc

$$\mathrm{card} H = 3 * 19 * 18 * 6 = 6156$$

$$\mathrm{card} I = 10 * 25 * 19 * 6 = 28500$$

Comme H et I sont disjoints et $E = H \cup I$,

$$\mathrm{card} E = \mathrm{card} H + \mathrm{card} I = 6156 + 28500 = 34656$$

D'où

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}} = \frac{34656}{57 * 56 * 55} = \frac{34656}{175560} = 0.197$$

Techniques de dénombrement

Les arrangements

Définition : Une disposition ordonnée de r objets distincts pris parmi n est appelée *arrangement*. On note A_n^r le nombre d'arrangements de r objets distincts parmi n (avec toujours $r \leq n$).

Calcul de A_n^r : considérons les r positions comme fixées. Pour la première étape, on a n choix possibles, pour la deuxième, $n-1$ choix possibles, ..., pour la $r^{\text{ème}}$, $n-r+1$ choix possibles.

Les arrangements

Définition : Une disposition ordonnée de r objets distincts pris parmi n est appelée *arrangement*. On note A_n^r le nombre d'arrangements de r objets distincts parmi n (avec toujours $r \leq n$).

Calcul de A_n^r : considérons les r positions comme fixées. Pour la première étape, on a n choix possibles, pour la deuxième, $n-1$ choix possibles, ..., pour la $r^{\text{ème}}$, $n-r+1$ choix possibles.

Proposition : Le nombre d'arrangements de r objets pris parmi n est :

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Les permutations

Définition : Une *permutation* de n éléments est une disposition ordonnée de ces n éléments.

Proposition : Les permutations de n éléments sont au nombre de $A_n^n = n!$

Les combinaisons (1/2)

Définition : Un choix de r objets distincts pris parmi n sans tenir compte de leur ordre est appelé *combinaison*. On note C_n^r le nombre de combinaisons de r objets distincts parmi n.

Exemple : Si on prend l'ensemble des combinaisons de 2 lettres parmi 4 lettres $\{a, b, c, d\}$:

- La combinaison $\{a, b\}$ est la même que la combinaison $\{b, a\}$
- L'arrangement $\{a, b\}$ est différent de l'arrangement $\{b, a\}$.

Les combinaisons (2/2)

Calcul de C_n^r :

- Dans un arrangement on choisit r objets, puis on tient compte de leur ordre.
- Dans une combinaison seul le choix des r objets compte, on a :
  - Nombre de façons d'ordonner les r objets : $r!$
  - A chaque combinaison, on peut associer $r!$ arrangements
    $\Longrightarrow$ il y a $r!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.

Les combinaisons (2/2)

Calcul de C_n^r :

- Dans un arrangement on choisit r objets, puis on tient compte de leur ordre.
- Dans une combinaison seul le choix des r objets compte, on a :
  - Nombre de façons d'ordonner les r objets : $r!$
  - A chaque combinaison, on peut associer $r!$ arrangements
    $\Longrightarrow$ il y a $r!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.

Proposition : Le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n est :

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Les arrangements cherchés sont de la forme $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$ avec :

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Les arrangements cherchés sont de la forme $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$ avec :

- $\mathrm{card} A = A_3^1 A_{19}^1 = 3 * 19 = 357$

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Les arrangements cherchés sont de la forme $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$ avec :

- $\mathrm{card} A = A_3^1 A_{19}^1 = 3 * 19 = 357$
- $\mathrm{card} B = A_{10}^1 A_{25}^1 = 10 * 25 = 250$

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Les arrangements cherchés sont de la forme $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$ avec :

- $\mathrm{card} A = A_3^1 A_{19}^1 = 3 * 19 = 357$
- $\mathrm{card} B = A_{10}^1 A_{25}^1 = 10 * 25 = 250$
- $\mathrm{card} C = A_{25}^1 A_{10}^1 = 25 * 10 = 250$

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Les arrangements cherchés sont de la forme $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$ avec :

- $\mathrm{card} A = A_3^1 A_{19}^1 = 3 * 19 = 357$
- $\mathrm{card} B = A_{10}^1 A_{25}^1 = 10 * 25 = 250$
- $\mathrm{card} C = A_{25}^1 A_{10}^1 = 25 * 10 = 250$
- $\mathrm{card} D = A_{19}^1 A_3^1 = 19 * 3 = 357$

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (2/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

On a $E = A \cup B \cup C \cup D$

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (2/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

On a $E = A \cup B \cup C \cup D$

D'où

$$\mathrm{card} E = \mathrm{card} A + \mathrm{card} B + \mathrm{card} C + \mathrm{card} D = 357 + 250 + 250 + 357 = 1214$$

Solution de l'exemple 1 par les arrangements (2/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

On a $E = A \cup B \cup C \cup D$

D'où

$$\mathrm{card} E = \mathrm{card} A + \mathrm{card} B + \mathrm{card} C + \mathrm{card} D = 357 + 250 + 250 + 357 = 1214$$

La probabilité de tirer 1 étudiant (e) de chaque genre et 1 étudiant (e) de chaque groupe vaut :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}} = \frac{1214}{3192} = 0.38$$

Probabilités sur un ensemble fini

Probabilités sur un ensemble fini Ω

Définition : Si l'univers Ω est constitué de n évènements élémentaires ω_i i.e. $\mathrm{card}(\Omega) = n$, une *mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ sur Ω consiste à se donner n nombres $\mathbb{P}(\omega_i) = p_i$, avec $p_i \in [0, 1]$ la probabilité de l'évènement ω_i, tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Si l'évènement A est la réunion disjointe de k évènements élémentaires ω_i, avec $0 < k < n$, la probabilité de A vaut alors par définition :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{k} \omega_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Probabilités sur un ensemble fini Ω

Définition : L'*évènement impossible* est noté $\emptyset$, et sa probabilité $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, puisqu'il n'est jamais réalisé.

Probabilités sur un ensemble fini Ω

Définition : L'*évènement impossible* est noté $\emptyset$, et sa probabilité $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, puisqu'il n'est jamais réalisé.

Définition : On note $\bar{A}$ l'*évènement complémentaire* de A dans Ω. Sa probabilité vaut $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Probabilités sur un ensemble fini Ω

Définition : L'*évènement impossible* est noté $\emptyset$, et sa probabilité $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, puisqu'il n'est jamais réalisé.

Définition : On note $\bar{A}$ l'*évènement complémentaire* de A dans Ω. Sa probabilité vaut $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Propriété : Soient A et B deux évènements et $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

Probabilités sur un ensemble fini Ω

Définition : L'*évènement impossible* est noté $\emptyset$, et sa probabilité $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, puisqu'il n'est jamais réalisé.

Définition : On note $\bar{A}$ l'*évènement complémentaire* de A dans Ω. Sa probabilité vaut $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Propriété : Soient A et B deux évènements et $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

Théorème des probabilités totales : Soient A et B deux évènements

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Si A et B sont disjoints, i.e., si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Probabilité uniforme sur un ensemble fini Ω

Définition : Il y a *probabilité uniforme* ou *équiprobabilité* lorsque toutes les probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i sont égales et valent

$$\frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

La probabilité d'un sous-ensemble $A \subset \Omega$ de k éléments vaut alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

Événements indépendants et dépendants

Définition : Deux évènements A et B sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A)$ n'est pas affectée par $\mathbb{P}(B)$, et on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$

Exemple : Les tirages avec remise sont des évènements indépendants.

Événements indépendants et dépendants

Définition : Deux évènements A et B sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A)$ n'est pas affectée par $\mathbb{P}(B)$, et on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$

Exemple : Les tirages avec remise sont des évènements indépendants.

Définition : Soient A et B deux évènements avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle *probabilité conditionnelle de B par rapport à A*, $\mathbb{P}(B|A)$, la probabilité de réalisation de l'évènement B sachant que A est réalisé.

Définition : Deux évènements A et B sont *dépendants* si $\mathbb{P}(A)$ est affectée par $\mathbb{P}(B)$, et on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$

Exemple : Les tirages sans remise sont des évènements dépendants.

Solution de l'exemple 1 par probabilités conditionnelles (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Soient $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$.

Solution de l'exemple 1 par probabilités conditionnelles (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Soient $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$.

Calcul de $\mathbb{P}(A)$:
probabilité de tirer en premier une fille du groupe 1, multipliée par la probabilité, sachant qu'on a déjà tiré une fille du groupe 1, de tirer un garçon du groupe 2.

Solution de l'exemple 1 par probabilités conditionnelles (1/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Soient $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$.

Calcul de $\mathbb{P}(A)$:
probabilité de tirer en premier une fille du groupe 1, multipliée par la probabilité, sachant qu'on a déjà tiré une fille du groupe 1, de tirer un garçon du groupe 2.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F1) * \mathbb{P}(G2|F1) = \frac{3}{57} * \frac{19}{56} = \frac{357}{3192}$$

Solution de l'exemple 1 par probabilités conditionnelles (2/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Soient $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$.

- $\mathbb{P}(A) = \frac{357}{3192}$
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F2) * \mathbb{P}(G1|F2) = \frac{10}{57} * \frac{25}{56} = \frac{250}{3192}$
- $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(G1) * \mathbb{P}(F2|G1) = \frac{25}{57} * \frac{10}{56} = \frac{250}{3192}$
- $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(G2) * \mathbb{P}(F1|G2) = \frac{19}{57} * \frac{3}{56} = \frac{357}{3192}$

Solution de l'exemple 1 par probabilités conditionnelles (2/2)

E : { 1 de chaque genre et 1 de chaque groupe }

	Groupe 1	Groupe 2	Total
Filles	3	10	13
Garçons	25	19	44
Total	28	29	57

Soient $A = (F1, G2)$, $B = (F2, G1)$, $C = (G1, F2)$, et $D = (G2, F1)$.

- $\mathbb{P}(A) = \frac{357}{3192}$
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F2) * \mathbb{P}(G1|F2) = \frac{10}{57} * \frac{25}{56} = \frac{250}{3192}$
- $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(G1) * \mathbb{P}(F2|G1) = \frac{25}{57} * \frac{10}{56} = \frac{250}{3192}$
- $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(G2) * \mathbb{P}(F1|G2) = \frac{19}{57} * \frac{3}{56} = \frac{357}{3192}$

On a $E = A \cup B \cup C \cup D$, donc :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{357}{3192} + \frac{250}{3192} + \frac{250}{3192} + \frac{357}{3192} = \frac{1214}{3192} = 0.38$$

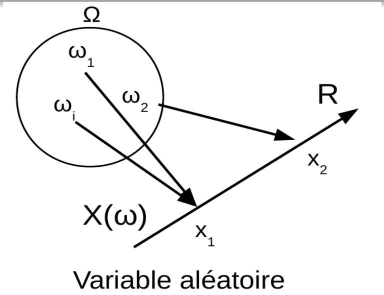
Définition

Variables aléatoires

Définition : Soit un univers Ω, une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ et des évènements E. Une *variable aléatoire* X est l'application :

$$(\Omega, E, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$$

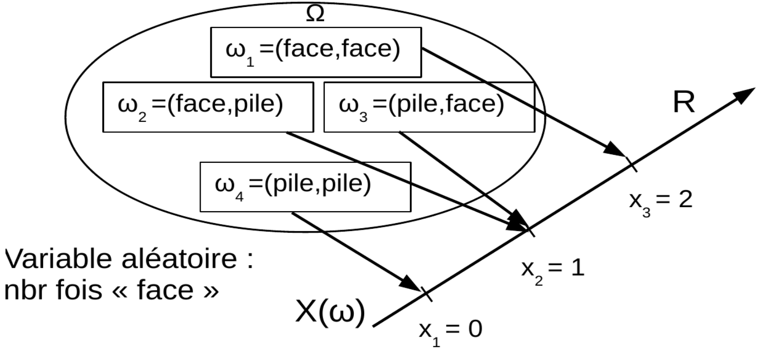
$$\omega \mapsto X(\omega)$$



La valeur $X(\omega) = x$ correspond à la réalisation de la v.a. X pour l'évènement élémentaire ω.

Variables aléatoires : Exemple

- On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu.
- Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable aléatoire X qui désignera le nombre de fois où le côté "face" est obtenu. Ici, X peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.



Variables aléatoires discrètes : définition

Définition : Une *variable aléatoire discrète* est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières, en nombre fini ou dénombrable :

$$(\Omega, E, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$$

$$\omega \mapsto X(\omega)$$

On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ l'ensemble des valeurs ordonnées prises par X.

Exemples :

- le nombre de petits par portée pour une espèce animale donnée,
- le nombre de filles dans une fratrie de deux enfants,...

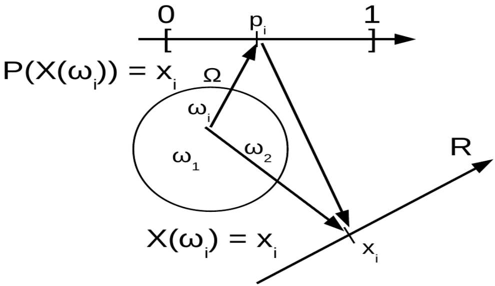
En règle générale, toutes les v.a. qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération sont de type discrètes.

Variables aléatoires discrètes : fonction de densité discrète

Pour calculer la probabilité que la v.a. X soit égale a x_i, on cherche tous les évènements élémentaires ω_j pour lesquels $X(\omega_j) = x_i$.

Définition : La *loi de probabilité* ou *fonction de densité discrète* f d'une v.a. discrète est :

$$f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_j) \text{ si } X(\omega_j) = x_i \text{ sur les évts } \omega_1, \ldots, \omega_k$$



Variables aléatoires discrètes - Exemple

Exemple (rappel) : On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable X qui désignera le nombre de "face" obtenu. X peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.

La variable X = nombre de côtés "face" peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.

- $f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((\text{pile}, \text{pile})) = \frac{1}{4}$
- $f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}((\text{pile}, \text{face})) + \mathbb{P}((\text{face}, \text{pile})) = \frac{1}{2}$
- $f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}((\text{face}, \text{face})) = \frac{1}{4}$
- $f(x) = 0 \text{ si } x \notin \{0, 1, 2\}$

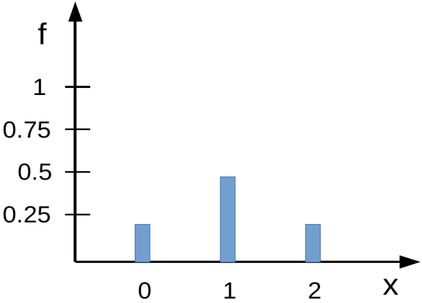
fonction de densité discrète :

x	0	1	2	total
$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Variables aléatoires discrètes

fonction de densité discrète :

x	0	1	2	total
$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



Fonction de densité discrète

Variables aléatoires discrètes : fonction de répartition

Définition : La *fonction de répartition* d'une variable aléatoire X indique pour chaque valeur réelle x la probabilité que X prenne une valeur au plus égale à x. C'est la somme des probabilités des valeurs de X jusqu'à x. On la note F :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$$

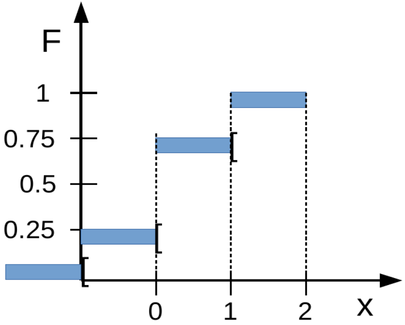
La fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées, elle est toujours croissante et comprise entre 0 et 1.

La fonction de répartition d'une v.a. discrète est une fonction en escalier.

Variables aléatoires discrètes - Exemple

La fonction de répartition

x	0	1	2	total
$F(x) = \mathbb{P}(X < x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1



Fonction de répartition discrète

Variables aléatoires continues : définition

Définition : Une *variable aléatoire* est dite *continue* si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné), ou une réunion d'intervalles.

Exemples :

- la masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée,
- le taux de glucose dans le sang, ...

En règle générale, toutes les v.a. qui résultent d'une mesure sont de type continu.

Variables aléatoires continues - Fonction de répartition

Pour une v.a. continue, $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$: il est impossible d'observer exactement cette valeur.

$\Longrightarrow$ on ne peut pas définir sa loi via les évènements élémentaires.

On considère alors $\mathbb{P}(a < X < b)$: probabilité que la v.a. X prenne des valeurs de l'intervalle $[a, b]$ à partir de la *fonction de répartition*.

Définition : La *fonction de répartition* F d'une v.a. X indique $\forall a \in \mathbb{R}$, la probabilité que X prenne une valeur strictement inférieure à a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X < a) = F(a) \text{ et } \mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

La fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées, elle est toujours croissante, comprise entre 0 et 1.

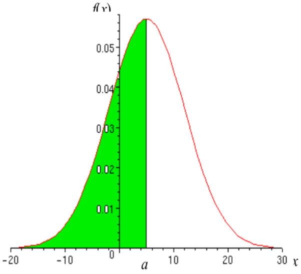
Variables aléatoires continues - Densité de probabilité

Définition : Une v.a. aléatoire possède une densité si sa fonction de répartition F est dérivable. Cette dérivée (notée f) est appelée *fonction densité de probabilité* de X et a les propriétés suivantes :

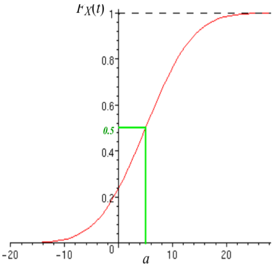
1. f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Densité et répartition - Exemple 1

La fonction de répartition correspond aux probabilités cumulées associées à la variable aléatoire continue sur l'intervalle d'étude



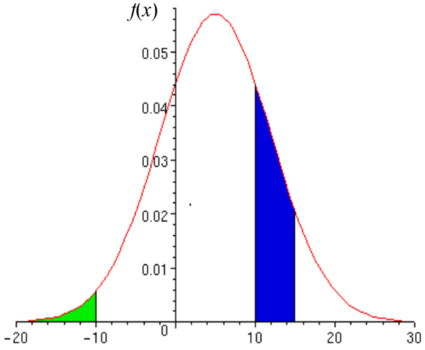
Fonction densité de probabilité $f(x)$



Fonction de répartition F_X

L'aire hachurée en vert sous la courbe de la fonction densité de probabilité correspond à la probabilité P(X<a)

Densité et répartition - Exemple 2



1. La fonction rouge f est une densité de probabilité (l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de x définies).
2. l'aire verte est $F(10) = \mathbb{P}(X < -10)$
3. l'aire bleue est $F(15) - F(10) = \mathbb{P}(+10 < X < +15)$

Variables aléatoires continues - Propriétés

Propriétés : Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f et de fonction de répartition F, alors :

1. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ avec $a < b$,
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = a) = 0$, si f est continue à droite du point a (ce qui implique que $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$).

Variables aléatoires continues - Propriétés

Propriétés : Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f et de fonction de répartition F, alors :

1. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ avec $a < b$,
2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$, si f est continue à droite du point a (ce qui implique que $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$).

1. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$,

Variables aléatoires continues - Propriétés

Propriétés : Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f et de fonction de répartition F, alors :

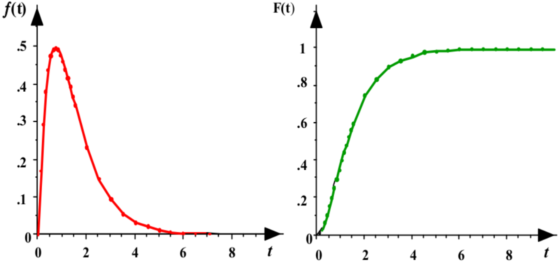
1. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ avec $a < b$,
2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$, si f est continue à droite du point a (ce qui implique que $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$).

1. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$,
2. Si f continue sur $[a, a+h]$, avec $h \to 0$, par le théo accroiss. finis : $\exists c = a + \theta h \in [a, a+h]$, si $0 < \theta < 1$ tel que : $\mathbb{P}(a \leq X \leq a+h) = \int_a^{a+h} f(x)dx = F(a+h) - F(a) = hf(a+\theta h)$ De plus, si $h \to 0$: $f(a+\theta h) \to f(a)$ et $hf(a+\theta h) \to 0$, d'où $\mathbb{P}(a \leq X \leq a+h) \to 0 = \mathbb{P}(X = a)$.

Variables aléatoires continues - Exemple (1/2)

Soit une population de canards colverts où l'ensemble des individus quittent leur lieu de repos pour aller sur un étang (lors d'une alerte).

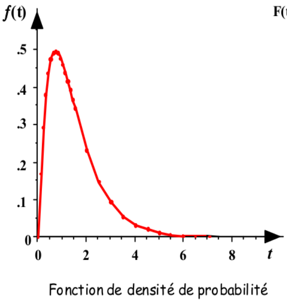
- À $t = 0$, la surface de l'étang est déserte
- Probabilité qu'un canard regagne l'étang entre les temps t_1 et t_2 : $F(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, avec $f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ la densité de probabilité

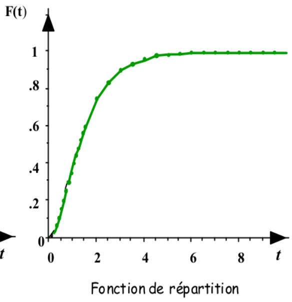


Fonction de densité de probabilité

Fonction de répartition

Variables aléatoires continues - Exemple (2/2)





- $f(t)$: évolution de la recolonisation de l'étang par les canards en fonction du temps.
  $\Rightarrow$ Après 7 minutes, tous les canards ont regagné l'étang.
- $F(t)$: distribution des probabilités cumulées.
  $\Rightarrow$ plus de 50% des canards se posent sur l'étang au cours des 2 premières minutes qui suivent l'alerte.

Espérance mathématique, Variance, écart-type et covariance

Espérance mathématique d'une distribution de probabilité

Idée générale : Si l'on s'imagine que le nombre d'observations croît indéfiniment, les fréquences observées vont tendre vers des probabilités théoriques et on admet que la moyenne calculée sur un échantillon de taille n va tendre vers une valeur limite qui sera la moyenne de l'ensemble des valeurs de la population entière.

On appelle cette moyenne **espérance mathématique de la variable aléatoire** X. C'est intuitivement la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.

Espérance mathématique : cas discret

L'espérance de X est la somme de toutes les réalisations possibles de X pondérées par leur probabilité.

Cas d'une variable discrète : Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est f : $f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$:

- Si X prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

- Si X prend un nombre dénombrable de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) \text{ (à condition que la série converge)}$$

Espérance mathématique : cas continu

Cas d'une variable continue :

Si la variable aléatoire X est continue et a pour fonction de densité de probabilité f, son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \text{ (si la fonction } x \to xf(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R})$$

Propriétés de l'espérance mathématique

Les propriétés de l'espérance s'appliquent à une variable aléatoire discrète ou à une variable aléatoire absolument continue.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance $\mathbb{E}$, alors :

- **Propriété 1** $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- **Propriété 2** $\forall a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$
- **Propriété 3** Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- **Propriété 4** Si la variable aléatoire est constante : $\forall \omega$, $X(\omega) = k$, alors $\mathbb{E}(X) = k$
- **Propriété 5** Si X et Y indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Variance et écart-type d'une distribution de probabilité

Idée générale : ce sont deux mesures servant à caractériser la dispersion d'une distribution. Elles indiquent de quelle manière la variable aléatoire se disperse autour de sa moyenne (son espérance).

Interprétation : Une variance de zéro signale que toutes les valeurs sont identiques. Une petite variance est signe que les valeurs sont proches alors qu'une variance élevée est signe que celles-ci sont très écartées.

Variance d'une distribution de probabilité

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\Big((X-\mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}\Big(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\Big) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\
&\quad \text{car } \mathbb{E}(X) \text{ est une constante} \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}$$

1. **Cas d'une variable discrète finie :**

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\Big([X-\mathbb{E}(X)]^2\Big) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\Big(x_i^2 f(x_i)\Big) - \mathbb{E}(X)^2$$

2. **Cas d'une variable continue :**

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mathbb{E}(X))^2 f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriétés de la variance

Les propriétés de la variance s'appliquent à une une variable aléatoire discrète ou à une variable aléatoire absolument continue.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω :

- **Propriété 1** $\forall a \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X)$
- **Propriété 2** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$
- **Propriété 3** Si X et Y ind., alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$
- **Propriété 4** Si X et Y ind., alors $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Écart-type

Définition : On appelle écart-type de la variable aléatoire X la racine carrée de sa variance :

$$\theta(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Covariance de deux variables aléatoires (1/2)

Lorsque deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, la **covariance** permet de déterminer l'intensité de leur dépendance.

Définition : La covariance de deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Cov}(X, Y) & = & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)(Y - \mathbb{E}(Y)) \\
 & = & \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\
 & = & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
 & & \text{car } \mathbb{E}(X) \text{ et } \mathbb{E}(Y) \text{ sont des constantes} \\
\mathrm{Cov}(X, Y) & = & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{array}$$

Covariance de deux variables aléatoires (2/2)

Proposition 1 Si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.
Attention : La réciproque n'est pas vraie. Deux variables de covariance nulle ne sont pas obligatoirement indépendantes.

Covariance de deux variables aléatoires (2/2)

Proposition 1 Si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.
Attention : La réciproque n'est pas vraie. Deux variables de covariance nulle ne sont pas obligatoirement indépendantes.

Proposition 2 Si deux variables aléatoires sont dépendantes :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Loi de Bernouilli : Définition

- Soit un univers $\Omega = \{S, E\}$, avec S pour "succès" et E pour "échec".
- On construit une variable aléatoire discrète, X correspondant au nombre de succès telle que au cours d'une épreuve :
  si S est réalisé, $X = 1$
  si E est réalisé, $X = 0$

On appelle *variable de Bernoulli*, la variable aléatoire X telle que :

$$\Omega \to \mathbb{R}$$
$$X(\Omega) \mapsto \{0, 1\}$$

La loi de probabilité associée à la variable de Bernoulli X telle que,

$$\mathbb{P}(X = 0) = q$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = p \text{ avec } p + q = 1$$

est appelée *loi de Bernoulli* et est notée $\mathcal{B}(1, p)$

Loi de Bernouilli : Espérance et variance

Espérance de la variable de Bernoulli :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i) = (0 * q) + (1 * p) = p$$

Variance de la variable de Bernoulli :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{2} \left(x_i^2 f(x_i) \right) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \left[(0^2 * q) + (1^2 * p) \right] - p^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) = pq \end{aligned}$$

Loi Binomiale : Définition

- Soit n variables de Bernouilli X_i et l'application
$$S_n \ : \ \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ avec } S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$
- La *variable binomiale* S_n représente le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n épreuves identiques et indépendantes.

On appelle *loi binomiale*, la loi de probabilité suivie par la somme de n variables de Bernouilli, où la probabilité associée au succès est p :

$$S_n \ : \ \Omega^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ notée } \mathcal{B}(n,p)$$

La probabilité que $S_n = k$, i.e. obtenir k succès en n épreuves ind. est :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

On a bien : $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$ car $p + q = 1$

Loi de binomiale : Exemple

- Dans une expérience on fait pénétrer successivement n rats dans un labyrinthe en forme de H. On étudie alors la probabilité que k rats empruntent la branche supérieure droite du H.
- A chaque épreuve, deux évènements peuvent se produire : soit le rat suit l'itinéraire voulu (succès) soit il ne l'emprunte pas (échec).
- Sachant qu'il y a 4 itinéraires possibles (branches), la probabilité du succès $p = \frac{1}{4}$

Hypothèses :

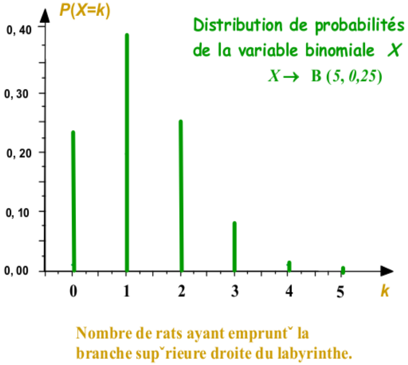
- si les rats n'ont pas été conditionnés,
- si la branche supérieure droite ne comporte aucun élément attractif ou répulsif,
- si le choix de l'itinéraire d'un rat n'affecte pas le choix du suivant (odeurs)

alors la v.a. X : "itinéraire emprunté pour n rats" suit une loi binomiale :

$$X \mapsto \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$$

Loi de binomiale : Exemple

Fonction de densité de probabilité pour $n = 5$ rats :



k	$P(X=k)$
0	$C_5^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}237$
1	$C_5^1\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}395$
2	$C_5^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}264$
3	$C_5^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}088$
4	$C_5^4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0{,}015$
5	$C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0{,}001$

Loi binomiale : Espérance et variance

Espérance d'une variable binomiale :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Variance d'une variable binomiale :

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

Loi de Poisson : Définition

Elle décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si les évènements se produisent :

1. avec une fréquence moyenne (*espérance*) connue,
2. indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent.

Notons $\lambda > 0$ le nombre moyen d'évènements dans un intervalle de temps fixé, et X la v.a. qui représente le nombre d'évènement, la probabilité qu'il existe exactement k évènements est :

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$\forall k,\ p_k > 0$, on a bien $\displaystyle\sum_{k\geq 0} p_k = \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

puisque $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$.

Loi de poisson : Exemple

Expérience

- Une suspension bactérienne contient 5000 bactéries/litre.
- On ensemence à partir de cette suspension, 50 boites de Pétri, à raison d'$1\mathrm{cm}^3$ par boite.
- Notons X la v.a. qui représente le nombre de colonies par boite,
- On suppose qu'en moyenne 5 colonies se développent dans un intevalle de temps fixé, ie. $\lambda = 5$
- la loi de probabilité de X est $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-5}5^k}{k!}$

Questions

1. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune colonie sur la boite de Pétri ? $\Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = 0.0067$
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une colonie sur la boite de Pétri ? $\Rightarrow \mathbb{P}(X > 0) = 1 - 0.0067 = 0.9933$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Lorsque n devient grand, le calcul des probabilités d'une loi binomiale $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ devient très fastidieux. Sous certaines conditions, on peut trouver une approximation de $\mathbb{P}(S_n = k)$ par la loi de Poisson.

Théorème : Soit l'application S_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On suppose que $\mathbb{E}(S_n) = np \to \lambda > 0$. Alors S_n converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}(S_n = k) \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

En pratique, si $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ et $np \leq 15$, on peut approximer la loi de S_n par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

C'est ce théorème qui justifie le fait que la loi de Poisson est utilisée comme modèle de certaines expériences aléatoires (nombre de clients entrant dans un magasin, nombre de coquilles dans une page de journal,...).

Loi de poisson : Espérance et variance

Espérance d'une variable aléatoire de Poisson :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k>0} kp_k = \sum_{k>0} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k>0}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k>0}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{(k)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \text{ car } \sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \\
\mathbb{E}(X) &= \lambda
\end{aligned}$$

Variance d'une variable aléatoire de Poisson :

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k>0} k^2 p_k - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k>0} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \text{ en posant } k^2 = k + k(k-1)$$

$$= \sum_{k>0} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + \sum_{k>0} k(k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k>0}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k>1}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = (\lambda+\lambda^2)e^{-\lambda}e^{\lambda} - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Processus aléatoire : définition

Un processus aléatoire est un ensemble de *variables aléatoires*, toutes définies sur le même espace de probabilité, et indexées par un paramètre réel t. On note un tel processus $\{X_t\ ;\ t \in \mathscr{C}\}$.

Processus aléatoire : définition

Un processus aléatoire est un ensemble de *variables aléatoires*, toutes définies sur le même espace de probabilité, et indexées par un paramètre réel t. On note un tel processus $\{X_t \,;\, t \in \mathscr{C}\}$.

- t est le paramètre du processus,

Processus aléatoire : définition

Un processus aléatoire est un ensemble de *variables aléatoires*, toutes définies sur le même espace de probabilité, et indexées par un paramètre réel t. On note un tel processus $\{X_t\,;\ t \in \mathscr{C}\}$.

- t est le paramètre du processus,
- $\mathscr{C}$ est l'ensemble des valeurs du paramètre. Si $\mathscr{C}$ fini ou infini dénombrable $\mathscr{C}$ est discret (ex : $\mathscr{C} = \{0, 1, 2, \ldots\}$), sinon $\mathscr{C}$ est continu (ex :$\mathscr{C} = [0, +\infty[$).

Processus aléatoire : définition

Un processus aléatoire est un ensemble de *variables aléatoires*, toutes définies sur le même espace de probabilité, et indexées par un paramètre réel t. On note un tel processus $\{X_t \,;\, t \in \mathscr{C}\}$.

- t est le paramètre du processus,
- $\mathscr{C}$ est l'ensemble des valeurs du paramètre. Si $\mathscr{C}$ fini ou infini dénombrable $\mathscr{C}$ est discret (ex : $\mathscr{C} = \{0, 1, 2, \ldots\}$), sinon $\mathscr{C}$ est continu (ex :$\mathscr{C} = [0, +\infty[$).
- On note S est l'espace des états (i.e. des valeurs possibles) des X_t. Si S fini ou infini dénombrable, S est discret, sinon S est continu.

Processus aléatoire : définition

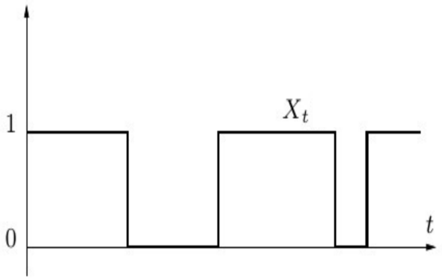
Un processus aléatoire est un ensemble de *variables aléatoires*, toutes définies sur le même espace de probabilité, et indexées par un paramètre réel t. On note un tel processus $\{X_t\,;\,t \in \mathscr{C}\}$.

- t est le paramètre du processus,
- $\mathscr{C}$ est l'ensemble des valeurs du paramètre. Si $\mathscr{C}$ fini ou infini dénombrable $\mathscr{C}$ est discret (ex : $\mathscr{C} = \{0, 1, 2, \ldots\}$), sinon $\mathscr{C}$ est continu (ex :$\mathscr{C} = [0, +\infty[$).
- On note S est l'espace des états (i.e. des valeurs possibles) des X_t. Si S fini ou infini dénombrable, S est discret, sinon S est continu.

Exemple : t peut être interprété comme le temps et $\mathscr{C}$ comme les instants à considérer, X_t est alors la valeur du processus à l'instant t.

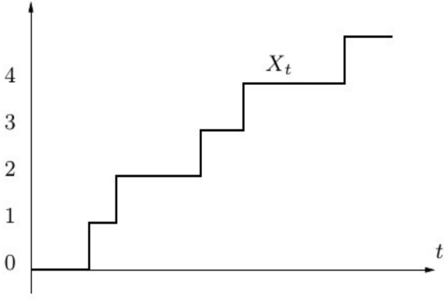
Exemples

Une machine est soit en état de fonctionnement (état 1), ou bien en panne (état 0). Lorsqu'elle est en panne, on appelle un réparateur, qui met un temps aléatoire à la réparer.
Dans ce cas $S = \{0, 1\}$ est un espace d'états fini et $\mathscr{C}$ est continu.



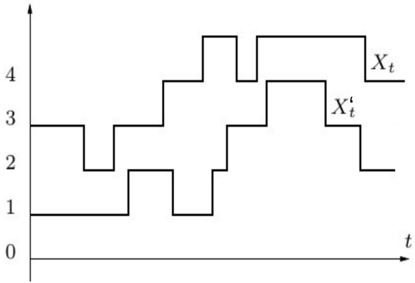
Exemples

On observe le nombre de véhicules arrivant à un péage d'autoroutes à partir d'un instant initial $t = 0$.
Dans ce cas l'espace d'états est $S = \mathbb{N}$ et chaque trajectoire est croissante.
De plus, $\mathscr{C}$ est continu.



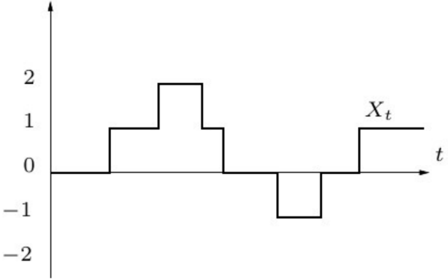
Exemples

On étudie l'évolution d'une population au cours du temps : celle-ci peut augmenter (naissance) ou diminuer (décès).
Ici encore l'espace d'états est $S = \mathbb{N}$. On représente ici l'évolution pour deux populations différentes, donc deux trajectoires X_t et X'_t.
De plus, $\mathscr{C}$ est continu.



Exemples

Une puce se déplace par sauts, tous de même amplitude, sur une droite, avec choix de la direction au hasard et à des instants aléatoires. On s'intéresse à sa trajectoire au cours du temps.
Dans ce cas on peut considérer comme espace d'états $S = \mathbb{Z}$, l' ensemble des entiers relatifs.
De plus, $\mathscr{C}$ est continu.



Les processus markoviens

On s'intéresse ici à un cas particulier très classique de processus stochastiques : ceux qui, d'une part, sont à valeurs dans un espace d'états S et, d'autre part, possèdent la propriété de Markov : l'évolution future est indépendante du passé sachant l'état présent.

Définition 1 Le processus aléatoire $\{\ X_t\ ;\ t \in \mathscr{C}\}$ est un *processus de Markov* si pour tout entier n, pour tout $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} \in \mathscr{C}$, et pour tout ensemble d'états S :

$$\mathbb{P}\{X_{t_{n+1}} \in S | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\} = \mathbb{P}\{X_{t_{n+1}} \in S | X_{t_n}\}$$

Les processus markoviens homogènes

Dans de nombreux modèles, les transitions entre deux instants t et t' ne dépendent pas des dates t et t', mais seulement du temps écoulé entre ces deux dates, i.e. de $(t' - t)$. C'est ce qu'on appelle l'homogénéité (temporelle) du processus.

Définition 2 Un processus de Markov est dit **homogène** si

$$\mathbb{P}\{X_{t+\theta} \in S | X_t\} = \mathbb{P}\{X_\theta \in S | X_0\}$$

i.e. $\mathbb{P}\{X_{t+\theta} \in S | X_t\}$ ne dépend pas de t.

Les processus stationnaires

Définition : Le processus aléatoire $\{ X_t \,;\, t \in \mathscr{C}\}$ est un *processus stationnaire* si : $t_i \in \mathscr{C}$, $t_i + s \in \mathscr{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (n est un entier quelconque), alors :

$$\mathbb{P}\{X_{t_1} < x_1, \ldots, X_{t_n} < x_n\} = \mathbb{P}\{X_{t_1+s} < x_1, \ldots, X_{t_n+s} < x_n\} \ \forall s$$

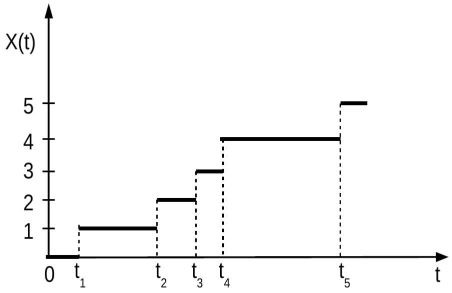
Un processus est stationnaire si sa loi est invariante par translation.

Les processus de comptage

Définition : *Un processus de comptage* est un processus à valeurs entières qui compte les occurences d'un certain évènement dans le temps, avec :

- $X_0 = 0$
- $\forall t_1 < t_2,\ X_{t_1} \leq X_{t_2}$

Des évts se produisent aléatoirement à partir de l'instant $t = 0$, et la v.a. X_t est le nombre d'évts qui se sont produits entre les instants 0 et t.



Les processus de comptage de Poisson

Les postulats définissant un processus de Poisson sont :

1. La probabilité qu'au moins 1 évènement se produise pendant un petit intervalle de tps h (i.e. $h \to 0_+$) est proportionnelle à h :

$$\mathbb{P}\{X_{t+h} - X_t = 1 | X_t = k\} = \lambda h + o(h)\,,\ (\lambda > 0)$$

2. La probabilité qu'aucun évènement ne se produise pendant un petit intervalle de tps h (i.e. $h \to 0_+$) est :

$$\mathbb{P}\{X_{t+h} - X_t = 0 | X_t = k\} = 1 - \lambda h + o(h)$$

3. La probabilité que 2 évènements ou plus se produisent pendant un petit intervalle de temps h (i.e. $h \to 0_+$) est $o(h)$. (Ce postulat revient à exclure la possibilité de la réalisation simultanée de 2 évènements ou plus).

($o(h)$: toute fonction définie au voisinage de 0 et telle que $\frac{o(h)}{h} \to 0$ quand $h \to 0_+$)

Les processus de poisson

Définition : *Un processus de Poisson* est un processus de comptage de Markov homogène, dont l'espace des états est discret $S = \{1, 2, \ldots\}$, l'ensemble des paramètre est continu $\{X_t \,;\, t \in [0, +\infty]\}$, et où la variable X_t suit la loi de poisson de paramètre λt :

$$\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Les processus de poisson : Exemple

Rappel : $\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

On suppose que le nombre de tremblements de terre en Californie suit un processus de Poisson $X_t, t \geq 0$. Supposons que l'unité de temps est l'année et que le nombre moyen de tremblements de terre par an est de 20, i.e. l'intensité de X_t est $\lambda = 20$

- Quelle est la probabilité d'observer entre 39 et 41 tremblements de terre dans les deux prochaines années.

Les processus de poisson : Exemple

Rappel : $\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

On suppose que le nombre de tremblements de terre en Californie suit un processus de Poisson $X_t, t \geq 0$. Supposons que l'unité de temps est l'année et que le nombre moyen de tremblements de terre par an est de 20, i.e. l'intensité de X_t est $\lambda = 20$

- Quelle est la probabilité d'observer entre 39 et 41 tremblements de terre dans les deux prochaines années.
  $\mathbb{P}(X_2 = \{39, 40, 41\}) = \mathbb{P}(X_2 = 39) + \mathbb{P}(X_2 = 40) + \mathbb{P}(X_2 = 41)$
  $= e^{-40} \frac{(40)^{39}}{39!} + e^{-40} \frac{(40)^{40}}{40!} + e^{-40} \frac{(40)^{41}}{41!}$

Les processus de poisson : Exemple

Rappel : $\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

On suppose que le nombre de tremblements de terre en Californie suit un processus de Poisson $X_t, t \geq 0$. Supposons que l'unité de temps est l'année et que le nombre moyen de tremblements de terre par an est de 20, i.e. l'intensité de X_t est $\lambda = 20$

- Quelle est la probabilité d'observer entre 39 et 41 tremblements de terre dans les deux prochaines années.
  $\mathbb{P}(X_2 = \{39, 40, 41\}) = \mathbb{P}(X_2 = 39) + \mathbb{P}(X_2 = 40) + \mathbb{P}(X_2 = 41)$
  $= e^{-40} \frac{(40)^{39}}{39!} + e^{-40} \frac{(40)^{40}}{40!} + e^{-40} \frac{(40)^{41}}{41!}$

- Quelle est la probabilité d'observer au moins un tremblement de terre dans les trois prochains mois.

Les processus de poisson : Exemple

Rappel : $\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

On suppose que le nombre de tremblements de terre en Californie suit un processus de Poisson $X_t, t \geq 0$. Supposons que l'unité de temps est l'année et que le nombre moyen de tremblements de terre par an est de 20, i.e. l'intensité de X_t est $\lambda = 20$

- Quelle est la probabilité d'observer entre 39 et 41 tremblements de terre dans les deux prochaines années.
  $\mathbb{P}(X_2 = \{39, 40, 41\}) = \mathbb{P}(X_2 = 39) + \mathbb{P}(X_2 = 40) + \mathbb{P}(X_2 = 41)$
  $= e^{-40} \frac{(40)^{39}}{39!} + e^{-40} \frac{(40)^{40}}{40!} + e^{-40} \frac{(40)^{41}}{41!}$

- Quelle est la probabilité d'observer au moins un tremblement de terre dans les trois prochains mois.
  $\mathbb{P}(X_{0.25} \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X_{0.25} = 0) = 1 - e^{-5}$

Les processus de naissance

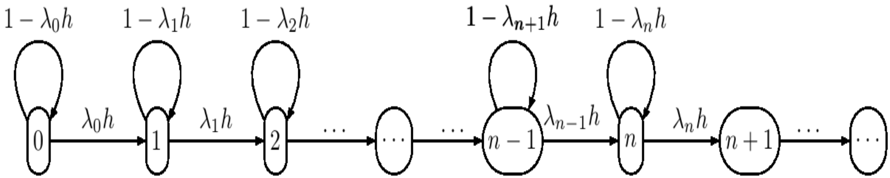
Une généralisation naturelle du processus de Poisson consiste à faire dépendre la probabilité de réalisation d'un évènement à un instant donné du nombre d'évènements déjà réalisés.

Définition : Soient $\{\lambda_k\}$ une suite de nombres positifs, X_t le nombre de naissances dans l'intervalle $[0, t]$. *Un processus de naissance* est un processus de Markov satisfaisant les postulats :

1. $\mathbb{P}\{X_{t+h} - X_t = 1 | X_t = k\} = \lambda_k h + o(h)$
2. $\mathbb{P}\{X_{t+h} - X_t = 0 | X_t = k\} = 1 - \lambda_k h + o(h)$
3. $\mathbb{P}\{X_{t+h} - X_t < 0 | X_t = k\} = 0$

Il s'agit d'un processus homogène puisque λ_k ne dépend pas de t.

Graphe associé à un processus de naissance



Les processus de naissance et de mort

Une des généralisation du processus de naissance consiste à permettre à X_t de décroître aussi bien que de croître, on obtient alors un **processus de naissance et de mort**.

Définition *Un processus de naissance et de mort* est un processus de Markov homogène sur les états $0, 1, 2, \ldots$, avec ses probabilités de transition qui vérifient : $\forall h$, $\mathbb{P}_{ij}(h) = \mathbb{P}\{X_{t+h} = j | X_t = i\}$.

De plus, les $\mathbb{P}_{ij}(h)$ satisfont :

1. $\mathbb{P}_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad i \geq 0$
2. $\mathbb{P}_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad i \geq 1$
3. $\mathbb{P}_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i \geq 0$

Avec $\lambda_i > 0$, $\forall i$ et $\mu_i > 0$, $\forall i \neq 0$, $\mu_0 = 0$.

Les chaînes de Markov

Définition : *Une chaîne de Markov* est un processus de Markov à ensemble d'indices discrets T et espace d'états discrets S.
On a donc, la famille de variables aléatoires $\{X_t\,;\, t = 0, 1, 2\ldots\}$ qui est une chaîne de Markov si :

$$\mathbb{P}\{X_t = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{t-1} = i\} = \mathbb{P}\{X_t = j | X_{t-1} = i\}$$

avec $t \geq 1$ et $X_t \in S$ $(0 \leq k \leq t)$
(i.e. le futur dépend seulement de l'état présent).

Les chaînes de Markov

Définition : *Une chaîne de Markov* est un processus de Markov à ensemble d'indices discrets T et espace d'états discrets S.
On a donc, la famille de variables aléatoires $\{X_t\,;\, t = 0, 1, 2\ldots\}$ qui est une chaîne de Markov si :

$$\mathbb{P}\{X_t = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{t-1} = i\} = \mathbb{P}\{X_t = j | X_{t-1} = i\}$$

avec $t \geq 1$ et $X_t \in S$ $(0 \leq k \leq t)$
(i.e. le futur dépend seulement de l'état présent).

On note la **probabilité de transition**

$$\forall (i \in S, j \in S)\ p_{ij} = \mathbb{P}\{X_t = j | X_{t-1} = i\}$$

Les chaînes de Markov

- Dans la suite, nous ne considérerons que des chaînes de Markov homogènes avec un espace d'état $S = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$.

  Rappel : Une chaîne est dite **homogène** (dans le temps) si $\mathbb{P}\{X_t = j | X_{t-1} = i\}$ ne dépend pas de t.
- Le processus démarre dans un état et évolue d'un état à un autre.
- Chaque mouvement est appelé "pas".
- Si la chaîne est dans l'état E_i, elle passe à E_j avec la probabilité p_{ij}.
- Le processus peut rester dans l'état i avec la probabilité p_{ii}.

Exemple 4 : la ruine du joueur

- 2 joueurs A et B tirent à "pile ou face". Si A gagne (pile), il reçoit 1 euro de B, s'il perd (face) il donne 1 euro à B. La partie se termine lorsque l'un des deux joueurs est ruiné.
- Au début de la partie l'avoir de A est a euros et l'avoir de B est b euros. Posons $s = a + b$.
- Ensemble des états : $S = 0, 1, 2, \ldots, s-1, s$ avoir de A.
- Les probabilités de transmissions sont :

$$p_{ij} \begin{cases} \text{Proba "pile"} & = p \text{ si } j = i+1\,,\ i \neq 0 \\ \text{Proba "face"} & = q \text{ si } j = i-1\,,\ i \neq s \\ 1 \text{ si } i = j = 0 \text{ ou } i = j = s & \\ 0 \text{ dans les autres cas} & \end{cases}$$

Définition : matrice stochastique

On appelle *matrice stochastique* une matrice carrée P d'ordre r, dont les éléments vérifient :

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1, \ \forall (i,j) \in \{1, \ldots, r\}^2$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$

Matrice associée à une chaîne de Markov

- On peut regrouper les probabilités de transition pour former une matrice carrée d'ordre r, où $r = |S|$ désigne le nombre d'états.
- Le processus étant dans l'état i à l'instant t, il sera dans un des états $j = 1, 2, \ldots, r$ à l'instant $t + 1$, on a donc

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \ldots & p_{ir} \\ p_{r1} & p_{r2} & \ldots & p_{rr} \end{pmatrix}$$

Exemple 4 : la ruine du joueur (suite)

- 2 joueurs A et B tirent à "pile ou face". Si A gagne (pile), il reçoit 1 euro de B, s'il perd (face) il donne 1 euro à B. La partie se termine lorsque l'un des deux joueurs est ruiné.
- Au début de la partie l'avoir de A est a euros et l'avoir de B est b euros. Posons $s = a + b$.
- Ensemble des états : $S = 0, 1, 2, \ldots, s-1, s$ avoir de A.
- La matrice associée est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit P la matrice des probabilités de transition d'une chaîne de Markov. Le terme (i, j) de la matrice P^n (noté $p_{ij}^{(n)}$) donne la probabilité que la chaîne de Markov, partant de l'état i se trouve dans l'état j après n pas, et on a :

1. $$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}$$
2. $$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}$$
3. et de façon plus générale (Équation de Chapman-Kolmogorov)

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

1. Rappels de probabilité d'une expérience aléatoire
   - Le dénombrement
   - Les variables aléatoires

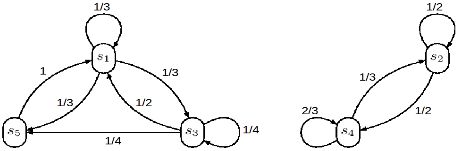
2. Lois discretes de probabilités et processus aléatoires
   - Lois discretes de probabilités
   - Les processus aléatoires
   - Les processus de comptage

3. Les chaînes de Markov
   - Définition
   - Matrice associée à une chaîne de Markov
   - **Graphe associé à une chaîne de Markov**
   - Distribution limite dans une chaîne de Markov

Graphe associé à une chaîne de Markov

- $G = (S, U)$
- Sommets : ensemble des états $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$
- Arcs : probabilité de transition non nulle $(E_i, E_j) \in U \Leftrightarrow p_{ij} > 0$
- **Exemple :** Considérons la chaîne de Markov à 5 états dont la matrice des probabilités de transition est la suivante :

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1	$1/3$	0	$1/3$	0	$1/3$
E_2	0	$1/2$	0	$1/2$	0
E_3	$1/2$	0	$1/4$	0	$1/4$
E_4	0	$1/3$	0	$2/3$	0
E_5	1	0	0	0	0



Classification des états dans une chaîne de Markov

- Considérons la relation d'équivalence définie sur les états de la chaîne $E_1, E_2, \ldots, E_r$:

$$E_i \, R \, E_j \Leftrightarrow \exists n \text{ tq } p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ et } \exists m \text{ tq } p_{ji}^{(m)} > 0$$

- En terme de graphe :

$$E_i \, R \, E_j \Leftrightarrow \text{ il existe un chemin de } E_i \text{ à } E_j \text{ et de } E_j \text{ à } E_i$$

- On dit que E_i et E_j sont deux *états communiquants* ssi $E_i \, R \, E_j$.
  On peut donc faire une partition des états en classes d'états communiquants. (Rque : ce sont les composantes fortement connexes du graphe associé à la chaîne).

Classification des états dans une chaîne de Markov

- C est un *ensemble fermé d'états* si :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, E_i \in C \\ \forall\, E_j \notin C \end{array}\right\} p_{ij} = 0$$

- Un ensemble fermé d'états à 1 seul élément E_i $(p_{ii} = 1)$ est un *état absorbant*.

Chaîne de Markov irréductible

Définition : Une chaîne de Markov est *irréductible* si elle ne contient aucun sous-ensemble fermé (autre que celui de tous ces états).

Chaîne de Markov irréductible

Définition : Une chaîne de Markov est *irréductible* si elle ne contient aucun sous-ensemble fermé (autre que celui de tous ces états).

Théorème : Dans une chaîne irréductible tous les états sont communiquants.

Chaîne de Markov irréductible

Définition : Une chaîne de Markov est *irréductible* si elle ne contient aucun sous-ensemble fermé (autre que celui de tous ces états).

Théorème : Dans une chaîne irréductible tous les états sont communiquants.

Propriété : Une chaîne est irréductible ssi le graphe associé est fortement connexe.

Premier temps d'atteinte d'un état (1/2)

Définition : On définit T_{ij} la *variable aléatoire du temps de premier passage* en j en partant de i, et on a :

$$T_{ij} = \min_k \{X_k = j \,,\, X_0 = i\}$$

Premier temps d'atteinte d'un état (1/2)

Définition : On définit T_{ij} la *variable aléatoire du temps de premier passage* en j en partant de i, et on a :

$$T_{ij} = \min_k \{X_k = j \, , \, X_0 = i\}$$

Propriété : On définit $f_{ij}^n = \mathbb{P}\{T_{ij} = n\}$ la *loi de probabilité associée à T_{ij}*, de premier passage en j au bout de n pas étant parti de i :

$$f_{ij}^{(n)} = \begin{cases} p_{ij} & \text{si } n = 1 \\ \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Premier temps d'atteinte d'un état (2/2)

On peut alors définir la probabilité de passer pour la première fois en un état après un nombre donné de pas :

Probabilité de passer pour la première fois en j partant de i avant la transition $n+1$:

$$F_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}$$

Probabilité que partant de i, le système atteigne un jour l'état j :

$$F_{ij} = \lim_{n \to \infty} F_{ij}^{(n)}$$

Les états transitoires et persistants

Définition : On dit que E_i est un *état transitoire* ssi $F_{ii} < 1$ (le système partant de i peut ne pas revenir en i).

Définition : On dit E_i est un *état persistant (ou récurrent)* (le système partant de E_i, repassera à coup sûr par E_i). Informellement, si une trajectoire typique du système passe infiniment souvent par cet état.

Périodicité des états persistants

Définition : Un état E_i persistant est un *état périodique de période* $\mathrm{d_i}$ si

$$d_i = \text{ PGCD } (n \text{ tq } p_{ii}^{(n)} > 0) > 1$$

(i.e. d_i est le PGCD de la longueur des circuits passant par E_i, la probabilité de passage de i à i en n transitions est nulle sauf si n est un multiple de d_i)

Périodicité des états persistants

Définition : Un état E_i persistant est un *état périodique de période* $\mathrm{d_i}$ si

$$d_i = \mathrm{PGCD}\ (n \text{ tq } p_{ii}^{(n)} > 0) > 1$$

(i.e. d_i est le PGCD de la longueur des circuits passant par E_i, la probabilité de passage de i à i en n transitions est nulle sauf si n est un multiple de d_i)

Définition : Si $d_i = 1$, l'état E_i est *apériodique ou non périodique*.
Une condition suffisante de non périodicité de l'état E_i est que le graphe possède une boucle au sommet E_i. Cette condition n'est pas nécessaire.

Périodicité des états persistants

Définition : Un état E_i persistant est un *état périodique de période* d_i si

$$d_i = \text{ PGCD } (n \text{ tq } p_{ii}^{(n)} > 0) > 1$$

(i.e. d_i est le PGCD de la longueur des circuits passant par E_i, la probabilité de passage de i à i en n transitions est nulle sauf si n est un multiple de d_i)

Définition : Si $d_i = 1$, l'état E_i est *apériodique ou non périodique*.
Une condition suffisante de non périodicité de l'état E_i est que le graphe possède une boucle au sommet E_i. Cette condition n'est pas nécessaire.

Théorème : Tous les états d'une classe d'états persistants ont la même période (résultat concernant la longueur des circuits dans une composante fortement connexe).

Quelques définitions

Définition : Une chaîne de Markov est *ergodique ou irréductible* s'il est possible d'aller de tout état à tout état (pas nécessairement en 1 pas).

Quelques définitions

Définition : Une chaîne de Markov est *ergodique ou irréductible* s'il est possible d'aller de tout état à tout état (pas nécessairement en 1 pas).

Définition : Une chaîne de Markov est *régulière* s'il existe une puissance de la matrice des probabilités de transition dont tous les éléments sont strictement positifs.

La particularité des chaînes régulières est qu'on peut aller de n'importe quel état vers n'importe quel autre en un nombre fixé de pas k, où k est indépendant de l'état de départ.

Quelques définitions

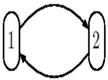
Définition : Une chaîne de Markov est *ergodique ou irréductible* s'il est possible d'aller de tout état à tout état (pas nécessairement en 1 pas).

Définition : Une chaîne de Markov est *régulière* s'il existe une puissance de la matrice des probabilités de transition dont tous les éléments sont strictement positifs.

La particularité des chaînes régulières est qu'on peut aller de n'importe quel état vers n'importe quel autre en un nombre fixé de pas k, où k est indépendant de l'état de départ.

Exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



La chaîne est ergodique mais non régulière

Vecteur de distribution des probabilités

- Soit le vecteur $Q(n) = [q_1(n), q_2(n), \ldots, q_r(n)]$ où $q_i(n)$ désigne la probabilité que la chaîne soit dans l'état E_i à l'instant n.

Vecteur de distribution des probabilités

- Soit le vecteur $Q(n) = [q_1(n), q_2(n), \ldots, q_r(n)]$ où $q_i(n)$ désigne la probabilité que la chaîne soit dans l'état E_i à l'instant n.
- On a $\sum_{i=1}^{r} q_i(n) = 1$

Vecteur de distribution des probabilités

- Soit le vecteur $Q(n) = [q_1(n), q_2(n), \ldots, q_r(n)]$ où $q_i(n)$ désigne la probabilité que la chaîne soit dans l'état E_i à l'instant n.
- On a $\sum_{i=1}^{r} q_i(n) = 1$
- On a $q_i(n+1) = \sum_{k=1}^{r} q_k(n) p_{ki}, \; \forall i.$

Vecteur de distribution des probabilités

- Soit le vecteur $Q(n) = [q_1(n), q_2(n), \ldots, q_r(n)]$ où $q_i(n)$ désigne la probabilité que la chaîne soit dans l'état E_i à l'instant n.
- On a $\sum_{i=1}^{r} q_i(n) = 1$
- On a $q_i(n+1) = \sum_{k=1}^{r} q_k(n) p_{ki}, \ \forall i.$
- Ou encore matriciellement $Q(n+1) = Q(n) * P$ (où P est la matrice des probabilités de transition)

Vecteur de distribution des probabilités

- Soit le vecteur $Q(n) = [q_1(n), q_2(n), \ldots, q_r(n)]$ où $q_i(n)$ désigne la probabilité que la chaîne soit dans l'état E_i à l'instant n.
- On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} q_i(n) = 1$
- On a $q_i(n+1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} q_k(n) p_{ki}$, $\forall i$.
- Ou encore matriciellement $Q(n+1) = Q(n) * P$ (où P est la matrice des probabilités de transition)
- Il en résulte que $Q(n) = Q(0) * P^n$

Vecteur de distribution des probabilités

- Soit le vecteur $Q(n) = [q_1(n), q_2(n), \ldots, q_r(n)]$ où $q_i(n)$ désigne la probabilité que la chaîne soit dans l'état E_i à l'instant n.
- On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} q_i(n) = 1$
- On a $q_i(n+1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} q_k(n) p_{ki}, \ \forall i.$
- Ou encore matriciellement $Q(n+1) = Q(n) * P$ (où P est la matrice des probabilités de transition)
- Il en résulte que $Q(n) = Q(0) * P^n$

Définition : Une chaîne de Markov est *régulière* ssi elle possède une distribution limite Q^* indépendante de l'état initial $Q(0)$:

$$\lim_{n \to \infty} Q(n) = Q^*$$

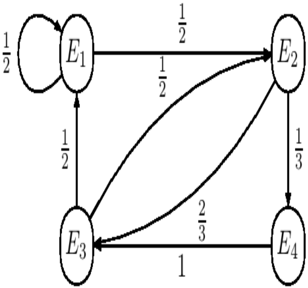
Théorème

Théorème : Une chaîne de Markov est *régulière* ssi la matrice des probabilités de transition P admet une limite P^* dont toutes les lignes sont identiques.

Preuve :

1. Soit une chaîne régulière, Q^* existe et ne dépend pas de $Q(0)$, on a $Q^* = Q(0) * P^*$.
   Supposons que l'état initial soit E_i, on a $Q(0) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, comme $Q^* = Q(0) * P^*$, on a bien que Q^* est la i^{eme} ligne de P^*,
   $\Longrightarrow$ toutes les lignes de P^* sont identiques et valent Q^*
2. Supposons toutes les lignes de P^* identiques $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$.
   $$Q^* = Q(0) * P^* \Longrightarrow q_i^* = \alpha_i \sum_{k=1}^{r} q_k(0) = \alpha_i \Longrightarrow$$
   $Q^* = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ et ne dépend donc pas de l'état initial.

Exemple de chaîne régulière (1/2)

- 

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Existence d'une boucle $\Longrightarrow$ non périodicité
- Graphe fortement connexe $\Longrightarrow$ 1 seule classe finale d'états communs

Exemple de chaîne régulière (2/2)

- La distribution limite est déterminée par $Q^* = Q^* P$ et $\sum_{i=1}^{4} q_i^* = 1$
- Soit $(q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*) = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $q_1^* = \frac{1}{2} q_1^* + \frac{1}{2} q_3^* \Longrightarrow q_1^* = q_3^*$
  - $q_2^* = \frac{1}{2} q_1^* + \frac{1}{2} q_3^* \Longrightarrow q_2^* = q_1^*$
  - $q_3^* = \frac{2}{3} q_2^* + q_4^*$
  - $q_4^* = \frac{1}{3} q_2^* \Longrightarrow q_4^* = \frac{1}{3} q_1^*$
  - $q_1^* + q_2^* + q_3^* + q_4^* = 1 \Longrightarrow q_1^* + q_1^* + q_1^* + \frac{1}{3} q_1^* = 1 \Longrightarrow q_1^* = \frac{3}{10}$
  - $\Longrightarrow Q^* = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10})$