Travaux dirigés 1 - Notions de base

Exercice 1
Montrer que tout graphe simple (i.e. sans boucle ni arête multiple) $G = (X, E)$ avec $|X| = n$, $|E| = m$, vérifie : $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 2
Montrer que dans tout graphe (non orienté) le nombre de sommets avec un degré impair est pair.

Exercice 3
Montrer que dans tout graphe simple (non orienté) il existe toujours au moins deux sommets avec le même degré.

Exercice 4
Montrer que tout graphe simple G dans lequel tout sommet a un degré supérieur ou égal à $\delta \geq 2$, contient une chaîne élémentaire de longueur $\geq \delta$ et un cycle élémentaire de longueur $\geq \delta + 1$.

Exercice 5
Montrer que si un graphe (non orienté) $G = (X, E)$ avec $|X| = n$ ne comporte pas de cycle, alors $|E| \leq n - 1$.

Exercice 6
Un tournoi de rugby où s'affrontent $n > 2$ équipes est organisé. Un match doit avoir lieu pour toute paire d'équipes, et il doit y avoir un gagnant à l'issue de chaque rencontre (pas de match nul possible). Montrer qu'il existe toujours une équipe Z qui vérifie la propriété suivante : pour toute autre équipe Y, soit Z a battu Y, soit Y a battu Z mais alors Z a battu une autre équipe W qui elle-même a battu Y.
Pour ce faire on formulera ce problème en utilisant la terminologie de la théorie des graphes.

Exercice 7
Sur le bord d'une rivière se trouvent un loup, une chèvre et un chou ; il n'y a qu'un bateau si petit que le batelier seul et l'un d'eux peuvent y tenir. Il est question de les passer tous les trois de l'autre côté, de telle sorte que le loup ne mange pas la chèvre, ni la chèvre le chou, pendant l'absence du batelier...

Exercice 8
Formuler les problèmes suivants en utilisant la terminologie de la théorie des graphes. (Préciser la modélisation employée).

- Est-il possible de placer huit reines sur un échiquier (8×8) de sorte qu'aucune ne puisse en atteindre une autre (en un seul coup)?
- Est-il possible pour un cavalier de se déplacer sur un échiquier de manière à passer une fois exactement sur chacune des cases?

Travaux dirigés 2 - Cliques, stables, colorations, graphes planaires

Exercice 1
Sept étudiants A,B,C,D,E,F et G doivent passer des examens dans des matières différentes désignées par les valeurs : 1,2,3,4,5,6,7. Les listes des examens que doivent passer les étudiants sont précisées dans le tableau 1.

Table 1: Examens que doivent passer les candidats

Candidat	Examen
A	7,4,5
B	1,2,5
C	3,4
D	2,6
E	3,4,5
F	3,6
G	7,2,6

Tous les candidats qui doivent passer un examen dans une matière donnée doivent le faire simultanément. Un candidat ne peut avoir qu'une seule épreuve par jour. On considère alors les problèmes suivants :

1. Combien d'examens (au maximum) est-il possible de réaliser sur une seule journée ?
2. Combien de jours sont-ils nécessaires pour pouvoir réaliser tous les examens ?

Formuler ces deux problèmes comme des problèmes d'optimisation sur des graphes. Détailler la modélisation employée.

Exercice 2
Soit $G = (X, E)$ un graphe simple. Le graphe complémentaire de G, noté $\overline{G} = (X, \overline{E})$, est le graphe qui satisfait :

- $E \cap \overline{E} = \emptyset$,
- le graphe $(X, E \cup \overline{E})$ est complet.

1. Montrer que si le graphe G n'est pas connexe, alors son graphe complémentaire est connexe.
2. Donner un exemple de graphe connexe pour lequel le graphe complémentaire est aussi connexe.

Exercice 3
Soit un graphe comportant exactement deux sommets de degré impair.
Montrer qu'il existe alors une chaîne reliant ces deux sommets.

Exercice 4
Soit $G = (X, E)$ un graphe (non orienté). On note $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un stable dans G.
Montrer que si Δ est la valeur de degré maximum sur l'ensemble des sommets de G, alors :

$$\mu(G) \geq \frac{|X|}{\Delta + 1}$$

Exercice 5
Etant donné un graphe $G = (X, E)$, on note $\chi(G)$ la cardinalité minimum d'une coloration de G (i.e. le nombre minimum de couleurs affectées les sommets telles que pour toute paire de sommets (i, j) affectés de la même couleur, nécessairement : $(i, j) \notin E$).
Démontrer l'inégalité suivante :

$$\chi(G).\chi(\overline{G}) \geq |X|.$$

Exercice 6
Montrer en utilisant la formule d'Euler que le graphe biparti complet $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Exercice 7
Montrer que si G est un graphe planaire simple avec $n \geq 3$ sommets et m arêtes, alors $m \leq 3n - 6$.

Travaux dirigés 3 - Exploration d'un graphe

Exercice 1
Votre mission (si vous l'acceptez): supprimer le Minotaure dans le labyrinthe conçu par l'architecte Dédale et son fils Icare. Pour ce faire, vous élaborez un plan d'exploration qui vous permettra dans le cas (improbable) de succès, de rejoindre la sortie ...

Proposez une méthode pour chacun des deux cas suivants :

- vous y allez seul,
- vous avez convaincu tous les autres étudiants du mastère de se joindre à votre quête.

Un prédécesseur a pu dessiner la carte suivante avant de succomber... Donner la liste ordonnée des salles et des intersections qui seront explorées par chacune des méthodes proposées.
Dans le cas de plusieurs choix possibles lors de l'exploration on utilisera la règle de priorité suivante : commencer par explorer les intersections, puis les salles dans l'ordre alphabétique.

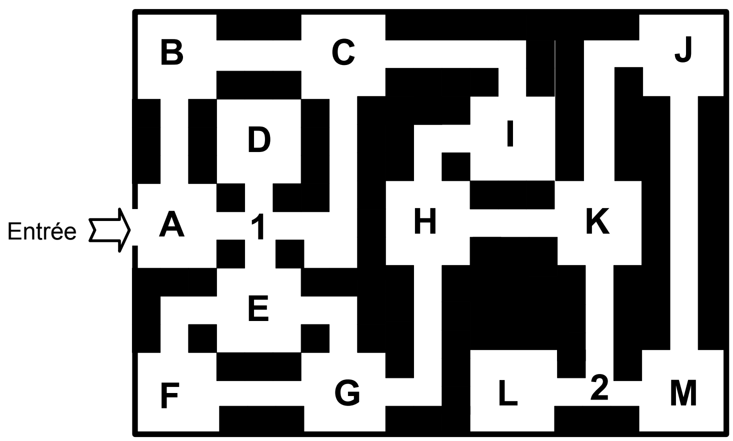


Figure 1: Carte du labyrinthe

Travaux dirigés 4 - Arbres

Exercice 1 [Réseau de télécommunications]
Une banque souhaite établir au moindre coût un réseau de télécommunications reliant son agence principale, située dans le quartier de La Bourse à Paris et sept de ses succursales. Le coût d'installation d'une ligne (privée) entre deux agences est précisé dans le tableau ci-dessous.

	B	O	E	R	S	L	N	C
Bourse	0							
Opéra	5	0						
Etoile	18	17	0					
République	9	11	27	0				
St-Lazare	13	7	23	20	0			
Louvre	7	12	15	15	15	0		
Neuilly	38	38	20	40	40	35	0	
Châtelet	22	15	25	25	30	10	45	0

Déterminer la structure du réseau dont la réalisation a un coût total minimum.

Exercice 2 [Transmission de messages confidentiels]
N personnes doivent échanger des messages confidentiels en utilisant un réseau de communications modélisé par un graphe non-orienté connexe $G = (X, E)$. L'ensemble de sommets X correspond aux N personnes. Il existe une arête reliant les sommets i et j si et seulement si des messages peuvent être transmis directement de i vers j ou de j vers i. Pour chaque arête (i, j), on connaît la probabilité p_{ij} pour qu'un message soit intercepté. Comment un message devrait-il circuler entre ces personnes afin de minimiser la probabilité d'interception ?
<u>Données</u> :
$N = 6$. Probabilités exprimées en pourcentages (%): $p_{12} = 1$, $p_{13} = 2$, $p_{14} = 1$, $p_{16} = 4$, $p_{23} = 2$, $p_{24} = 3$, $p_{34} = 1$, $p_{36} = 4$, $p_{46} = 4$, $p_{45} = 2$, $p_{56} = 3$.

Exercice 3 [Propriétés d'un arbre couvrant de poids minimum]
Soit G un graphe connexe avec pour ensemble de sommets X, d'arêtes E, et des poids $(d_e)_{e\in E}$ portés sur les arêtes. Montrez que si $\mathcal{T}^\star$ est un arbre recouvrant de poids minimum dans G, alors il s'agit aussi d'une solution optimale du problème consistant à déterminer un arbre recouvrant de G tel que le maximum des poids de ses arêtes soit le plus petit possible :

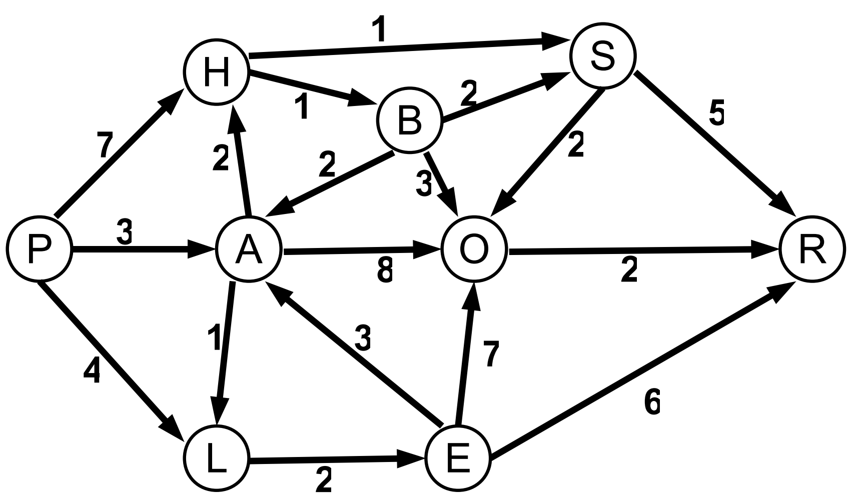
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Minimiser } \max\{d_e \colon e \in F\}\\ \text{sous la contrainte :}\\ (X, F) \text{ est un arbre recouvrant de } G.\end{array}\right.$$

Travaux dirigés 5 - Plus courts chemins

Exercice 1
Algorithme de Moore-Dijkstra.
Montrer, en donnant un exemple, que lorsque les longueurs sur les arêtes peuvent avoir des valeurs négatives alors l'application de l'algorithme de Moore-Disjkstra ne fournit pas nécessairement les plus courts chemins. Que donne toujours la mise en oeuvre de cet algorithme (à travers le prédécesseur associé à chaque sommet)?

Exercice 2
Un message doit être transmis de Paris (P) à Rana (R) en Norvège en utilisant le réseau suivant. Les valeurs associées à chaque arc correspondent au délai de transmission du message depuis une extrémité vers l'autre.
Déterminer le chemin permettant de faire parvenir le plus rapidement possible ce message à sa destination.

Figure 2: Illustration pour l'exercice 2



Exercice 3
Commerce. On considère l'ensemble des pays suivants : Allemagne, Belgique, Espagne, France, Italie, Pays-Bas et Suisse. Dans chacun de ces pays un bien donné peut avoir un prix différent. Certains pays surproduisent ce bien, d'autres doivent l'importer. Chaque Etat décide de créer une institution dont l'objectif est de favoriser les échanges mais aussi de d'aider les producteurs. Pour ce faire, chaque pays fixe des règlementations commerciales, qui prennent la forme

de subventions allouées aux producteurs et/ou de taxes portées sur les importations. Ceci est résumé dans les deux tableaux suivants où sont reportés les coûts par unité de produit.

Table 2: Taxes. Taxes[i,j] représente le coût de transport d'une unité de produit depuis le pays i vers le pays j

Taxes	P	B	A	S	I	F	E
P							
B	15		8			22	
A	5			5		15	
S						5	
I				15		8	
F							
E						5	

Table 3: Subventions. Subventions[i,j] représente un montant attribué à un producteur s'il exporte du pays i vers le pays j

Subventions	P	B	A	S	I	F	E
P		15	5				
B							
A		10					
S			5		15		
I							
F		10	11	5	8		5
E							

Remarque : dans le cas où il n'y a ni subventions ni taxes, on supposera qu'il n'y a pas d'échange possible.

Une société implantée aux Pays-Bas qui doit livrer ses produits en Espagne souhaite tirer profit de ces accords commerciaux et contacte ses centres de transit. Les coûts de transport pour chaque unité de produit sont précisés ci-après.

Table 4: Coûts de transport

Transports	P	B	A	S	I	F	E
P		2	4				
B	2		3			2	
A	4	3		3		4	
S			3		2	5	
I				2		6	
F		2	4	5	6		6
E						6	

1. Modéliser ce problème.
2. Résoudre le problème relatif à l'exportation depuis les Pays-Bas vers l'Espagne.

Exercice 4
Gestion de stocks.
La demande d'un équipement important est de 2 unités pour chacun des mois suivants : janvier, février et mars. Deux unités sont livrées à la fin de chaque mois. L'entreprise souhaite établir un plan de production de coût minimum.
Le stock ne peut pas excéder 2 unités en février ni en mars. Il est nul en janvier et doit être nul au 1^{er} avril. Un équipement est considéré en stock seulement s'il est présent le premier jour du mois. (Donc un équipement construit courant janvier ne sera comptabilisé en stock qu'au premier février ; et le coût de stockage est imputé au mois de février). La production maximale est de 4 unités par mois.
Pour un stock de i unités d'équipements, et une production de y unités, le coût mensuel est donné par : $C(y, i) = f(y) + 6i$ avec $f(0) = 0$, $f(1) = 15$, $f(2) = 17$, $f(3) = 19$ et $f(4) = 21$.
Modéliser ce problème de gestion des stocks et de la production comme un problème d'optimisation sur un graphe et le résoudre.

Travaux dirigés 6 - Flots dans les réseaux

Exercice 1 [Transport de marchandises]
Trois dépôts : A, B et C peuvent stocker respectivement 30, 20 and 45 tonnes de marchandises. Cinq destinations D, E, F, G et H ont des demandes respectives de 10, 25, 20, 25 et 15 tonnes. Des camions permettant d'effectuer le transport de marchandises entre différents points offrent les possibilités suivantes (quantités transportées exprimées en tonnes). Etablir le meilleur plan

	D	E	F	G	H
A	5	5		20	10
B		20	10		5
C	10	5	10	10	10

de transport.

Exercice 2 [Affectation de p tâches à q machines]
Afin de réaliser p tâches $t_1, \ldots, t_p$ on dispose de q machines $m_1, \ldots, m_q$. On connaît pour chaque machine la liste des tâches qu'elle peut effectuer. On cherche à déterminer le nombre maximum de tâches qui peuvent être traitées simultanément.
Formuler ce problème comme la recherche d'un flot maximum dans un graphe pour le cas particulier précisé ci-après avec : $p = q = 4$ (un symbole "$\times$" dans une entrée (t_i, m_j) signifie que la tâche t_i peut être réalisée par la machine m_j).

	m_1	m_2	m_3	m_4
t_1	$\times$		$\times$	
t_2		$\times$	$\times$	
t_3	$\times$			$\times$
t_4				$\times$

Exercice 3 [Ordonnancement sur m machines identiques]
On vise à ordonnancer un ensemble de J tâches sur m machines identiques. Chaque tâche $j \in J$ est caracterisée par :

- sa durée de traitement p_j (en jours),
- sa date de diponibilité r_j : début du jour où tous les éléments requis pour cette tâche sont prêts,
- sa date d'échéance d_j : début du jour où cette tâche doit être achevée.

Une machine ne peut traiter qu'une seule tâche à la fois, et une tâche donnée ne peut être traitée que par une seule machine à la fois. Mais les préemptions sont autorisées : une tâche peut être interrompue et exécutée sur différentes machines à des moments différents.
L'objectif est ici de déterminer un ordonnancement permettant la réalisation de toutes les tâches avant leur date d'échéance ou de montrer qu'un tel ordonnancement n'existe pas.

Résoudre ce problème dans le cas particulier où $m = 2$ pour l'ensemble de tâches dont les caractéristiques sont précisées ci-après.

On reportera sur un axe horizontal les différentes dates de disponibilité et d'échéance. On

Tâche j	1	2	3	4
Temps de traitement p_j	1.75	2.5	3.5	2.5
Date de disponibilité r_j	3	1	4	4
Date d'échéance d_j	5	4	9	7

remarquera que dans chaque intervalle de temps $T_{k,l}$ qui commence au début du jour k et prend fin au début du jour $l+1$, l'ensemble des tâches qui peuvent être réalisées ne change pas: $\{j \in J \mid r_j \leq k \text{ et } d_j \geq l+1\}$.

Modéliser ce problème d'ordonnancement comme la recherche d'un flot maximum dans un graphe comportant un ensemble de sommets associés aux tâches, un autre ensemble de sommets associés aux "intervalles de temps" et deux autres sommets : s (noeud source) et p (noeud puits).

Exercice 4

Une agence matrimoniale a pour clients un ensemble H d'hommes et F de femmes. A partir de l'étude des profils il apparaît que certains mariages soient envisageables et d'autres non. Naturellement, l'agence souhaite réaliser le plus grand nombre possible de mariages.

Résoudre ce problème avec les données suivantes (un symbole "$\times$" dans l'entrée (i, j) signifie qu'un mariage entre i et j est possible) :

	Cléopatre	Iphigénie	Juliette	Fanny	Chimène
Achille	$\times$	$\times$			
César	$\times$			$\times$	
Rodrigue			$\times$		$\times$
Roméo			$\times$		$\times$
Marius			$\times$	$\times$	

Cependant l'agence souhaite aussi maximiser la satisfaction de ses clients. En supposant que les candidats ont affecté les notes suivantes aux différentes possibilités quels devraient être les mariages réalisés ?

	Cléopatre	Iphigénie	Juliette	Fanny	Chimène
Achille	6	14			
César	13			10	
Rodrigue			12		16
Roméo			18		17
Marius			11	14	

Exercice 5
Un grossiste en fleurs assure leur transport depuis Mougins et Vallauris vers Paris. Ce transport est effectué par camionnettes de Vallauris à Cannes et de Mougins à Cannes ou Grasse, puis par train ou avion de Cannes à Paris et par train de Grasse à Paris.

Les camionnettes disponibles à Vallauris permettent d'acheminer au plus 400 cartons par semaine vers Cannes au coût unitaire de 20 euros ; celles de Mougins, 400 cartons dont la moitié vers Grasse au coût unitaire de 30 euros et l'autre moitié vers Cannes, au coût de 20 euros.

De plus, on doit limiter les envois par le train, trop lents, à 300 cartons dont 200 au plus depuis Cannes, le coût unitaire étant alors de 100 euros de Grasse et de 90 euros de Cannes. Par avion, le coût unitaire est de 160 euros mais leur nombre ne permet pas d'expédier plus de 200 cartons de Cannes à Paris.

Enfin, la production de Mougins ne peut dépasser 200 cartons, celle de Vallauris étant toujours excédentaire.

On désire étudier le transport global par semaine durant l'été de façon à envoyer un maximum de fleurs à Paris pour un coût minimum.