Exercice 1 : Détermination d'une solution de base initiale

Étant donné le programme linéaire (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} max\ z = & x_1 & +2x_2 & & \\ s.c. & 2x_1 & +\ 3x_2 & \geq & 3 \\ & 3x_1 & +\ x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & ,x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Question 1 : Appliquer la phase 1 de la méthode du simplexe qui consiste à introduire des variables artificielles et à changer la fonction objectif du problème pour trouver une solution de base réalisable.
Question 2 : Poursuivre le déroulement de la méthode du simplexe pour trouver une solution optimale de (P). Expliciter la solution trouvée et donner sa valeur.

Exercice 2 : Ecriture du dual

Ecrire le Dual du programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max z = & x_1 & -x_2 & +x_3 & & \\ \text{s.c.} & 3x_1 & +5x_2 & -4x_3 & +x_4 & \geq 6 \\ & x_1 & -3x_2 & & +2x_4 & \leq 5 \\ & & 7x_2 & -5x_3 & & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Dualité

Soit le PL suivant (forme canonique) :

$$\begin{cases} \min z = 2x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.c. } 2x_1 & +x_2 & \geq 3 \\ 2x_1 & -x_2 & \geq 5 \\ x_1 & +4x_2 & \geq 6 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Question 1 Ecrire le dual et les "contraintes des écarts complémentaires".
Question 2 La solution $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?
Question 3 La solution $x_1 = \frac{26}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? de base ? optimale ?

Exercice 4 : Algorithme du simplexe et dualité

Étant donné le programme linéaire (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} max\ z = & 3x_1 & +4x_2 & & \\ s.c & 5x_1 & +\ 6x_2 & \leq & 27 \\ & 2x_1 & -\ 3x_2 & \leq & 0 \\ & 4x_1 & +\ x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & ,x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Question 1 : Appliquer la phase 1 de la méthode du simplexe pour trouver une solution de base réalisable.
Question 2 : Poursuivre le déroulement de la méthode du simplexe pour trouver une solution optimale de (P). Expliciter la solution trouvée et donner sa valeur.
Question 3 : Ecrire le dual de (P).
Question 4 : Lister les relations d'exclusion associées à (D) et (P). Utiliser ces relations d'exclusion pour déterminer la solution optimale de (D).