Exercices

Exercice 1 : modélisation sous forme d'un PL
Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2. La fabrication de ces produits nécessite du temps de travail (main d'oeuvre), du temps machine et de la matière première. Les coefficients techniques de production ainsi que les prix de vente par unité de produit sont fournis dans le tableau suivant :

	P_1	P_2
quantité de "travail" nécessaire à la fabrication d'une unité de produit	0.75 h	0.5 h
quantité de "temps-machine" nécessaire à la fabrication d'une unité de produit	1.5 h	0.8 h
quantité de matière première nécessaire à la fabrication d'une unité de produit	2 kg	1 kg
prix de vente par unité de produit	15 euros	8 euros

Chaque semaine 400 kg de matière première au plus peuvent être achetés à un prix de 1.5 euros le kilo.
L'entreprise emploie 4 personnes qui travaillent chacune au plus 40 heures par semaine. Ces personnes peuvent effectuer des heures supplémentaires. Chaque heure supplémentaire est payée 10 euros.
Chaque semaine, la disponibilité en temps-machine est de 320 h.
En absence de publicité, la demande hebdomadaire du produit P_1 serait de 50 unités, celle de P_2 de 60 unités ; mais on peut réaliser de la publicité pour développer les ventes : chaque euro dépensé en publicité sur P_1 (respectivement sur P_2) augmente la demande hebdomadaire de P_1 (resp. de P_2) de 10 unités (resp. de 15 unités). Les frais de publicité ne doivent pas dépasser 100 euros par semaine.
Les quantités de P_1 et P_2 fabriquées doivent rester inférieures ou égales à la demande réelle (compte-tenu de la publicité).
L'entreprise souhaite maximiser son bénéfice. Le salaire des quatre personnes (hors heures supplémentaires) représente un coût fixe pour l'entreprise.

Question : Modéliser le problème d'optimisation sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 2 : mise sous forme standard d'un PL
Soit le programme linéaire suivant.

$$\begin{cases} \max z = & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \\ \text{s.c.} & -2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & \geq 4 \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 10 \\ & 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & = 5 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, & x_3 & \leq 0 \end{cases}$$

Question : Mettre ce programme linéaire sous forme standard.

Exercice 3 : calcul de coûts réduits et algorithme du simplexe
Soit le PL sous forme standard suivant :

$$\begin{cases} \max z = -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & \\ \text{s.c.} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 & \\ \quad x_2 + 3x_3 + x_5 = 6 & \\ \quad 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 7 & \\ \quad x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; x_6 \geq 0 & \end{cases}$$

Question 1 Soit la solution de base réalisable suivante : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 0, 1, 0, 3, 0)$. Vérifier que c'est une solution de base réalisable puis calculer les coûts réduits des variables hors-base. Quelle est sa valeur ? Est-ce une solution optimale ? Pourquoi ?
Indication : l'inverse de la matrice de base associée aux variables de base $\{x_1, x_3, x_5\}$ est
$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Question 2 Soit la solution de base réalisable suivante : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1)$. Déterminer une solution de base optimale en utilisant l'algorithme du simplexe.
Indication : l'inverse de la matrice de base associée aux variables de base $\{x_1, x_3, x_6\}$ est
$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : résolution d'un PL via l'algorithme du simplexe
Résoudre le PL suivant via l'algorithme du simplexe.

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 & \\ \text{s.c.} \quad x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 6 & \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 3 & \\ \quad x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \geq 0 & \end{cases}$$