# MPRO : RÉVISIONS EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

CEDRIC, CNAM, Paris, France





## Rappels de Programmation Linéaire (P.L.)

**Programmation linéaire** : *optimisation d'une forme linéaire de $n$ variables réelles $x_1, x_2, \dots, x_n$ soumises à $m$ contraintes linéaires. La forme linéaire à optimiser (maximiser ou minimiser) est appelée* **objectif**, **fonction objectif** *ou* **fonction économique**

Exemple de **programme linéaire** à $n = 3$ variables et $m = 3$ contraintes :

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrrcl} \textit{maximiser } f(x_1,x_2,x_3) = & 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & & \\ \quad \textit{sous les contraintes} & & & & & \\ & 4x_1 & -x_2 & -2x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq & 2 \\ & & & x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$





- La solution $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4.5$ vérifie les contraintes. Elle est dite **admissible** ou **réalisable**.
- Cette solution donne la **valeur** 4 à la fonction économique, mais elle n'est pas **optimale**
- Il existe d'autres solutions de valeur supérieure, par ex. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 6$ de valeur 7.
- La solution $x_1 = 3.75, x_2 = 0, x_3 = 6$ de valeur 19.5 est **optimale**.





## Forme générale d'un programme linéaire

La forme générale d'un programme linéaire est la suivante :

$$(P)\left\{\begin{array}{lcccl} \textit{max ou min } f(x) = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \qquad s.c & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & i = 1,\dots,k \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = k+1,\dots,l \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \geq & b_i & i = l+1,\dots,m \\ & x_j & \in & \mathbb{R} & j = 1,\dots,p \\ & x_j & \geq & 0 & j = p+1,\dots,n \end{array}\right.$$

Les données du problème sont : les coefficients réels $c_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $a_{ij}$ $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ et $b_i$ $(i = 1, \dots, m)$. Les variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ doivent satisfaire l'ensemble des contraintes et ne peuvent prendre que des valeurs réelles. On cherche à optimiser la fonction linéaire $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
On note $v(P)$, la valeur d'une solution optimale et réalisable du programme linéaire $(P)$.

## Résolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ (1/2)

Considérons le programme linéaire :

$$(P_{ex})\begin{cases} max\ z = & 120x_1 & +40x_2 & & \\ s.c. & x_1 & +\ x_2 & \leq & 100 \\ & 4x_1 & +\ x_2 & \leq & 160 \\ & 20x_1 & +\ 10x_2 & \leq & 1100 \\ & x_1 & ,\ x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

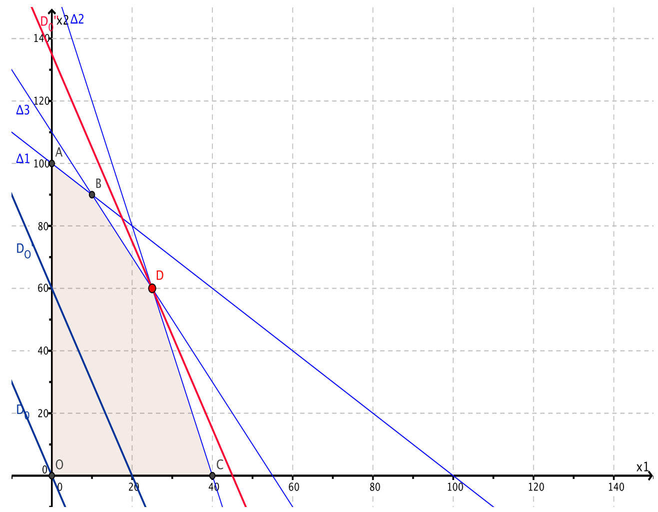
Domaine des solutions admissibles : polygone convexe délimité par les 2 axes et par les droites $(\Delta_1)$,$(\Delta_2)$ et $(\Delta_3)$.
Résoudre $(P_{ex})$ revient à déterminer la plus grande valeur $z$ t.q. la droite d'équation $120x_1 + 40x_2 = z$ ait un point commun avec l'ensemble des points admissibles.

équation de la droite $(D_0)$ : $120x_1 + 40x_2 = 0$
équation de la droite $(D'_0)$ : $120x_1 + 40x_2 = 2400$
équation de la droite $(D''_0)$ : $120x_1 + 40x_2 = 5400 \Rightarrow$ **solution optimale** de $(P_{ex})$ :
$x_1^* = 25, x_2^* = 60$ et $f(x_1^*, x_2^*) = 5400$ (Point D du domaine des solutions admissibles)





## Résolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ (2/2)








## Formes canonique et standard

Tout programme linéaire peut s'écrire aussi sous les 2 formes suivantes :

- **forme canonique** :

$$(P_1)\begin{cases} max & \sum_{j=1}^n c_j x_j & & & \\ s.c & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1,\ldots,m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

- **forme standard** :

$$(P_2)\begin{cases} max & \sum_{j=1}^n c_j x_j & & & \\ s.c & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & = & b_i & i = 1,\ldots,m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Un programme linéaire peut être posé sous l'une de ses 3 formes générale, canonique ou standard.





## Passer d'une forme générale à une forme canonique ou standard

- min $\leftrightarrow$ max :
  le *min* d'une fonction f est égal à l'opposé du *max* de la fonction -f : $min(f) = -max(-f)$
- Une variable réelle sans condition de signe est remplacée par 2 variables réelles positives ou nulles comme suit :

$$x_j \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_j & = & x_j^1 - x_j^2 \\ x_j^1 & \geq & 0 \\ x_j^2 & \geq & 0 \end{cases}$$

## équation $\leftrightarrow$ inéquation

- équation $\rightarrow$ inéquation

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij})x_j & \leq & (-b_i) \end{array} \right.$$

- inéquation $\rightarrow$ équation : introduction des nouvelles variables positives ou nulles dites **variables d'écart** comme suit :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} & = & b_i \\ x_{n+i} & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} & = & b_i \\ x_{n+i} & \geq & 0 \end{array} \right.$$





Soit un programme linéaire $(PL)$ écrit sous forme standard

$$(PL) \left\{ \begin{array}{lcccl} max & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j & & & \\ s.c & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & = & b_i & i = 1,\dots,m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1,\dots,n \end{array} \right.$$

*avec* $\forall i\ b_i \geq 0$ *et* $m \leq n$

*NB : ici, plus de distinction entre les* **variables structurelles** *ou* **variables de décision** *(qui ont servi à construire le modèle) et les variables d'écart*

$(PL)$ peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$(PL) \left\{ \begin{array}{lccc} max & cx & & \\ s.c & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \right.$$

avec $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$





## Rappels sur les égalités linéaires (1/2)

- Matrice $A$ de rang $m$ : $A$ comporte $m$ colonnes linéairement indépendantes
- On appelle **matrice de base** ou **base** du problème, toute sous-matrice **carrée** (de dimension $m \times m$), **régulière** (inversible) **extraite de** $A$
- Soit $B$ une matrice de base, $A$ peut s'écrire $A = (B, N)$ avec $N$, sous-matrice de $A$ formée des colonnes qui ne sont pas dans $B$.





## Rappels sur les égalités linéaires (1/2)

- De même, $x = (x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})^t$, $c = (c_{\mathcal{B}}, c_{\mathcal{N}})$
- $\mathcal{B}$ : ensemble des indices des colonnes de la base $B$.
- $\mathcal{N} = \{1,\dots,n\} - \mathcal{B}$
- On appelle **variables de base**, les variables de $x_{\mathcal{B}}$
- On appelle **variables hors-base**, les variables de $x_{\mathcal{N}}$
- $Ax = b$ s'écrit alors $Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}} = b$
- On appelle **solution de base** associée à la base $B$, la solution du système d'équations $Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}} = b$ obtenue en annulant toutes les variables hors-base.
- $B$ régulière $\Rightarrow$ solution de base unique : $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$, $x_{\mathcal{N}} = 0$
- $x$ solution de base réalisable si toutes ses composantes sont positives ou nulles $(B^{-1}b \geq 0)$ (B est dite **base réalisable**)
- Une solution de base est **dégénérée** si certaines des variables de base sont nulles.

## Plan







## Polyèdres convexes

- Notons $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$
- $X$, intersection de la variété affine $\{x : Ax = b\}$ avec l'orthant positif $\{x : x \geq 0\}$ est un ensemble **convexe** appelé **polyèdre**.

### Définition 1

*Un ensemble $C \in \mathbb{R}^n$ est* **convexe** *si*

$$\left.\begin{array}{rcl} x, y & \in & C \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y \in C$$

En d'autres termes,
pour tout $x$ et $y$ distincts dans $C$, on a $[x, y] \subset C$





Etant donnés

- $p$ points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de $\mathbb{R}^n$
- $p$ nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

on dira que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ est **une combinaison convexe** de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

### Théorème 1

*Un ensemble $C$ est convexe si et seulement si toute combinaison convexe de points de $C$ appartient à $C$.*





## Points extrêmes

- $x \in X$ est appelé **point extrême** du polyèdre s'il n'existe pas de points $x_1$ et $x_2$ de $X$ avec $x_1 \neq x_2$ t.q. $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ où $0 < \lambda < 1$
- autrement dit, $x$ est un point extrême de $X$ si on ne peut l'exprimer comme combinaison convexe de 2 points différents de $X$.

**Hypothèse : $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ est un polyèdre non vide**

### Théorème 2

*Tout point extrême du polyèdre $X$ correspond à une solution de base réalisable*

**Le polyèdre $X$ possède un nombre fini de points extrêmes.**

**Un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ non vide et borné est appelé polytope**

### Corollaire 1

*Tout point d'un polytope $X$ peut s'exprimer comme combinaison convexe de points extrêmes de $X$.*

### Théorème 3

*En supposant le polyèdre $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ non vide et borné ($X$ est un polytope),*
*l'optimum de la fonction linéaire $f(x) = cx$ sur le polytope $X$ est atteint en au moins un point extrême de $X$.*
*S'il est atteint en au moins deux points extrêmes alors il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points extrêmes.*

On déduit des 2 théorèmes précédents que **lorsqu'un PL admet un optimum fini alors il existe une base réalisable $B^*$ telle que la solution de base associée $x^*$ est optimale**





Il existe 2 classes de méthodes de détermination d'une solution réalisable et optimale. La méthode du simplexe traitée dans ce cours et les méthodes de points intérieurs.

- *La méthode du simplexe de Dantzig est une procédure itérative qui permet d'effectuer une exploration dirigée de l'ensemble des solutions de base réalisables.*
- *L'application de la méthode nécessite de connaître une solution de base réalisable initiale.*
- *À chaque itération, calcul d'une solution de base réalisable voisine et au moins aussi bonne que celle qui vient d'être calculée . Il est possible de garantir que la même base n'apparaît pas deux fois, ce qui assure la convergence du procédé.*
- *Ce parcours reste périphérique (sans jamais pénétrer à l'intérieur du polyèdre).*





## Plan







$$(PL)\left\{\begin{array}{llcc} max & f(x) = cx & & \\ s.c & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Soit $B$ une base réalisable de $(PL)$.
$(PL)$ peut se formuler de manière équivalente comme suit.

$$\left\{\begin{array}{llcc} max & f(x) = c_{\mathcal{B}}x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{N}}x_{\mathcal{N}} & & \\ s.c & Bx_{\mathcal{B}} + Nx_{\mathcal{N}} & = & b \\ & x_{\mathcal{B}} & \geq & 0 \\ & x_{\mathcal{N}} & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcc} max & f(x) = c_{\mathcal{B}}B^{-1}b + (c_{\mathcal{N}} - c_{\mathcal{B}}B^{-1}N)x_{\mathcal{N}} & & \\ s.c & x_{\mathcal{B}} + B^{-1}Nx_{\mathcal{N}} & = & B^{-1}b \\ & x_{\mathcal{B}} & \geq & 0 \\ & x_{\mathcal{N}} & \geq & 0 \end{array}\right.$$

## Notations :

- $\overline{a}_{ij}$ : terme général de la matrice $B^{-1}N$
- $\overline{b}_i$ : terme général du vecteur $B^{-1}b$

Nouvelle réécriture de $(PL)$

$$\begin{cases} max & f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ s.c & x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \overline{a}_{ij} x_j & = & \overline{b}_i & i \in \mathcal{B} \\ & x_j & \geq & 0 & j \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$





### Théorème 4

*Soit $B$ une base réalisable, extraite de $A$.*
*Une condition suffisante pour que $B$ soit une base optimale de $(PL)$ est que :*

$$\forall j \in \mathcal{N} \qquad \Delta_j = c_j - \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i \overline{a}_{ij} \leq 0$$

$\Delta_j$ : **coût réduit** ou **coût marginal** de la variable $x_j$





$(PL)$ associé à la base $B$ peut ainsi s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} max & f(x) = \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i \overline{b}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \Delta_j x_j & & & \\ s.c & x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \overline{a}_{ij} x_j & = & \overline{b}_i & i \in \mathcal{B} \\ & x_j & \geq & 0 & j \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

- $f(x)$ et les variables de base sont exprimées en fonction des variables hors-base.
- La solution de base $x = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{N}} \end{pmatrix}$ de valeur $\sum_{i \in \mathcal{B}} c_i \overline{b}_i$ est :

$$\forall i \in \mathcal{B} \; x_i = \overline{b}_i \text{ et } \forall j \in \mathcal{N} \; x_j = 0$$





- S'il existe $e \in \mathcal{N}$ t.q. $\Delta_e > 0$ alors il existe une solution de base de valeur strictement supérieure à $\sum_{i \in \mathcal{B}} c_i \overline{b}_i$ avec $x_e > 0$
- On note $B'$ la base adjacente à $B$ associée à cette solution de base strictement meilleure.
- $x_e$ est appelée variable entrante
- Critère de choix pour la colonne d'indice $e$ :
$\Delta_e = max\{\Delta_j : j \in \mathcal{N}\}$

## Plan

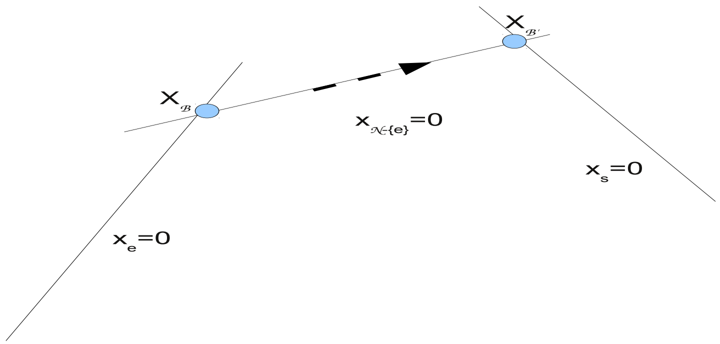






Chaque pas du parcours est réalisé en passant d'une base $B$ à une base adjacente $B'$ c'est-à-dire une base possédant les mêmes éléments que $B$ à l'exception d'un élément $e$ qui remplace un élément $s$ de $B$ :

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} - \{s\} + \{e\}$$








$B$ et $N$ sont modifiés en échangeant les colonnes $e$ et $s$.

$f(x) = \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i \overline{b}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \Delta_j x_j$
et $(\forall i \in \mathcal{B})$ $x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \overline{a}_{ij} x_j = \overline{b}_i$

On veut obtenir :

$f(x) = \sum_{i \in \mathcal{B}'} c_i \overline{b'}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}'} \Delta'_j x_j$
et $(\forall i \in \mathcal{B}')$ $x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}'} \overline{a'}_{ij} x_j = \overline{b'}_i$
avec $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{e\} - \{s\}$ ; $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup \{s\} - \{e\}$

$x_s$ est appelée variable sortante





On pose $x_e = \Theta \geq 0$ et on maintient $x_{\mathcal{N}-\{e\}} = 0$

On cherche la plus grande valeur à donner à $x_e$ qui satisfasse l'ensemble des contraintes du PL :

$$\forall i \in \mathcal{B} \; x_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{ie}\Theta \;\geq\; 0$$

- **si** $\overline{a}_{ie} > 0$ **alors** $\Theta \leq \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ie}}$
- **sinon** $\Theta$ **non borné**

- **si** la colonne entrante vérifie $\forall i \in \mathcal{B}$ $\overline{a}_{ie} \leq 0$ alors **la valeur de** $(PL)$ **est infinie.**
- **sinon**

$$\frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}} = \min\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ie}} : i \in \mathcal{B} \text{ et } \overline{a_{ie}} > 0\}$$

- Expression de $x_e$ dans la nouvelle base $B'$ ($\mathcal{B}' = \mathcal{B} + \{e\} - \{s\}$) :
  $x_s = \overline{b}_s - \sum_{j\in\mathcal{N}-\{e\}} \overline{a}_{sj}x_j - \overline{a}_{se}x_e$
  On obtient $x_e = \frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}} - \sum_{j\in\mathcal{N}'} \frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}}x_j$
- En remplaçant $x_e$ par son expression en fonction des variables de $\mathcal{N}'$ dans les autres équations associées à $B$, on obtient :
  $\forall i \in \mathcal{B} - \{s\} \quad x_i + \sum_{j\in\mathcal{N}'} x_j(\overline{a}_{ij} - \overline{a}_{ie}\frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}}) = \overline{b}_i - \overline{a}_{ie}\frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}}$
  $f(x) = \sum_{i\in\mathcal{B}} c_i\overline{b}_i + \Delta_e\frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}} + \sum_{j\in\mathcal{N}'} x_j(\Delta_j - \Delta_e\frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}})$





- Formules de passage $B^{-1}N$ à $B'^{-1}N'$

$$\forall i \in \mathcal{B} - \{s\} \quad : \overline{a}'_{ij} = \overline{a}_{ij} - \overline{a}_{ie}\frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}} \qquad (\Rightarrow \overline{a}'_{ie} = 0)$$
$$i = e \quad : \overline{a}'_{ej} = \frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}} \qquad (\Rightarrow \overline{a}'_{ee} = 1)$$

- Formules de passage $\overline{b} = B^{-1}b$ à $\overline{b}' = B'^{-1}b$

$$\forall i \in \mathcal{B} - \{s\} \quad : \overline{b}'_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{ie}\frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}}$$
$$i = e \quad : \overline{b}'_e = \frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}}$$





- Formules de passage $\Delta = c_{\mathcal{N}} - c_{\mathcal{B}}B^{-1}N$ à $\Delta' = c_{\mathcal{N}'} - c_{\mathcal{B}'}B'^{-1}N'$

$$\forall j \in \mathcal{N} - \{e\} \quad : \quad \Delta'_j = \Delta_j - \Delta_e\frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{se}}$$
$$j = s \quad : \quad \Delta'_s = -\frac{\Delta_e}{\overline{a}_{se}}$$

- Formules de passage $\overline{f} = c_{\mathcal{B}}B^{-1}b$ à $\overline{f}' = c_{\mathcal{B}'}B'^{-1}b$

$$\overline{f}' = \overline{f} + \Delta_e\frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}}$$





## Plan

Soit $(P) = max\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ un PL mis sous forme standard

**Algorithme 1 :** Algorithme du simplexe

Trouver une solution de base réalisable.
**Si** elle existe **alors**

- Déterminer $B$ et $N$ et les ensembles d'indices $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ associés.
- Calculer $B^{-1}N$, de terme général $\overline{a}_{ij}$ $(i \in \mathcal{B}, j \in \mathcal{N})$
- Calculer $\Delta_j = c_j - \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i \overline{a}_{ij}$ $(j \in \mathcal{N})$
- $VI \leftarrow FAUX$ $\{VI\, prend\ la\ valeur\ VRAI\, si\ v(P) est\ infinie\}$
- **Tant que** $(\exists\, j \in \mathcal{N} : \Delta_j > 0)$ et $(VI = FAUX)$ **Faire**
  - { *critère d'entrée dans la base*}
  - Choix de l'indice $e \in \mathcal{N} : \Delta_e = max\{\Delta_j : j \in \mathcal{N}\}$
  - **Si** $\forall\, i \in \mathcal{B}$ $\overline{a_{ie}} \leq O$ **alors** $VI \leftarrow VRAI$
  - **Sinon** $\{\exists\, x_i \in \mathcal{B} : \overline{a_{ie}} > 0\}$
    1. { *critère de sortie de la base*}
    2. Détermination de $s \in \mathcal{B}$ t.q.
       $$\frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}} = \min\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ie}} : i \in \mathcal{B} \text{ et } \overline{a}_{ie} > 0\}$$
    3. { *changement de base*}
    4. $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{e\} - \{s\}\, ; \mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup \{s\} - \{e\}$
    5. Calculer $\Delta_j$ $\forall j \in \mathcal{N}$
  - **Fin Si**
- **FinTantque**
- **Si** $VI = FAUX$ **alors** calculer $v(P)$ **Sinon** $v(P)$ est infinie
  **FinSi**

**Sinon** $Dom(P) = \emptyset$ : PAS DE SOLUTION **FinSi**





## Synthèse

L'algorithme primal du simplexe construit une séquence de bases adjacentes réalisables et non optimales avec une progression des valeurs des solutions engendrées jusqu'à l'obtention de $B^*$ ou la détection d'une valeur infinie pour le PL traité.





## Plan







Les données du PL sont réorganisées pour automatiser les calculs et alléger la méthode algébrique. On économise les écritures en représentant uniquement les coefficients des équations dans un tableau comme suit.

| var. du PL / var. de base | $x_1$ | $\dots$ | $x_e$ | $\dots$ | $x_j$ | $\dots$ | $\overline{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $x_i$ | $\overline{a}_{i1}$ | | $\overline{a}_{ie}$ | | $\overline{a}_{ij}$ | | $\overline{b}_i$ |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $x_s$ | $\overline{a}_{s1}$ | | $\boldsymbol{\overline{a}_{se}}$ | | $\overline{a}_{sj}$ | | $\overline{b}_s$ |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $\Delta$ | $\Delta_1$ | | $\Delta_e$ | | $\Delta_j$ | | $-\overline{f}$ |

Reprenons la base réalisable initiale de notre exemple illustratif : Les variables de base sont les variables d'écart : $x_3, x_4, x_5$. On choisit la variable entrante : $x_1$ ($\Delta_1 = max\{120, 40\}$ ) $\Rightarrow$ variable sortante : $x_4$ ($\frac{\bar{b}_4}{\bar{a}_{41}} = \min\{\frac{100}{1}, \frac{160}{4}, \frac{1100}{20}\}$)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 100 |
| $x_4$ | **4** | 1 | 0 | 1 | 0 | 160 |
| $x_5$ | 20 | 10 | 0 | 0 | 1 | 1100 |
| $\Delta$ | 120 | 40 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Pivot : $\bar{a}_{41} = 4$.
Pour obtenir le tableau associé à la nouvelle base, division de la ligne du pivot par le pivot et pour les autres lignes, application des formules de changement de base.





## Plan







L'optimum est réalisé en plusieurs points de la frontière du polyèdre des contraintes.
*ex : une arête (ou une face) du polyèdre des contraintes peut être optimale.*
Algébriquement, cela se traduit par l'existence de variable(s) hors-base avec un coût réduit nul à l'optimum : $\exists j \in \mathcal{N}\ \Delta_j = 0$





Illustration numérique :

$$(P)\left\{\begin{array}{lccc} max\ z = & 6x_1 & +4x_2 & \\ s.c & -3x_1 & +\ 2x_2 & \leq\ 4 \\ & 3x_1 & +\ 2x_2 & \leq\ 16 \\ & x_1 & & \leq\ 3 \\ & x_1 & ,x_2 & \geq\ 0 \end{array}\right.$$

Illustration numérique ⇒ mise sous forme standard :

$$(P)\left\{\begin{array}{lllllll} max\ z = & 6x_1 & +4x_2 & & & & \\ s.c & -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = 4 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 16 \\ & x_1 & & & & +x_5 & = 3 \\ & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & \geq 0 \end{array}\right.$$





Tableau optimal :

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{2}$ |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | -1 | 6 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | - 32 |

L'optimum est atteint au sommet $D = (3, \frac{7}{2})$ avec $\Delta_5 = 0$ où $x_5 \in \mathcal{N}$
Si on fait entrer $x_5$ dans l'ensemble des variables de base, la variable sortante est $x_3$ et le nouveau tableau est le suivant :





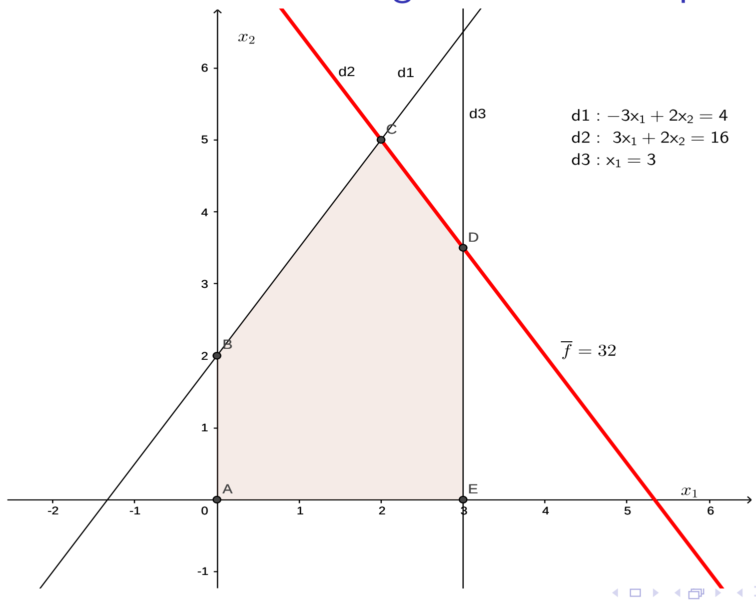
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 5 |
| $x_5$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | - 32 |

L'optimum est atteint en un autre sommet du polyèdre des contraintes : sommet $C = (2, 5)$.
Ainsi, l'ensemble des solutions optimales est le segment $[C, D]$





## Illustration d'un cas de dégénérescence de première espèce



Une (ou plusieurs) variable(s) de base a (ont) une valeur nulle dans la solution qui caractèrise le point extrême courant.
$\exists i \in \mathcal{B} t.q. \overline{b}_i = 0$ et $\overline{a}_{ie} > 0$ alors $i = s$
Alors la valeur de la fonction économique ne varie pas après le changement de base :

$$\overline{f}' = \overline{f} + \Delta_e \frac{\overline{b}_s}{\overline{a}_{se}} = \overline{f}$$

Ce cas particulier signifie qu'à un point extrême du polyèdre des contraintes correspondent plusieurs solutions de bases.
$\Rightarrow$ possible problème de cyclage





Illustration numérique :

$$(P)\left\{\begin{array}{lcccc} max\ z = & x_1 & +x_2 & & \\ s.c & -3x_1 & +\ 2x_2 & \leq & 4 \\ & 3x_1 & +\ 2x_2 & \leq & 16 \\ & x_1 & & \leq & 3 \\ & x_1 & +\ 4x_2 & \leq & 22 \\ & x_1 & ,x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$





Illustration numérique $\Rightarrow$ mise sous forme standard :

$$(P)\left\{\begin{array}{lcccccccc} max\ z = & x_1 & +x_2 & & & & & & \\ s.c & -3x_1 & +\ 2x_2 & +x_3 & & & & = & 4 \\ & 3x_1 & +\ 2x_2 & & +x_4 & & & = & 16 \\ & x_1 & & & & +x_5 & & = & 3 \\ & x_1 & +\ 4x_2 & & & & +x_6 & = & 22 \\ & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & ,x_6 & \geq & 0 \end{array}\right.$$



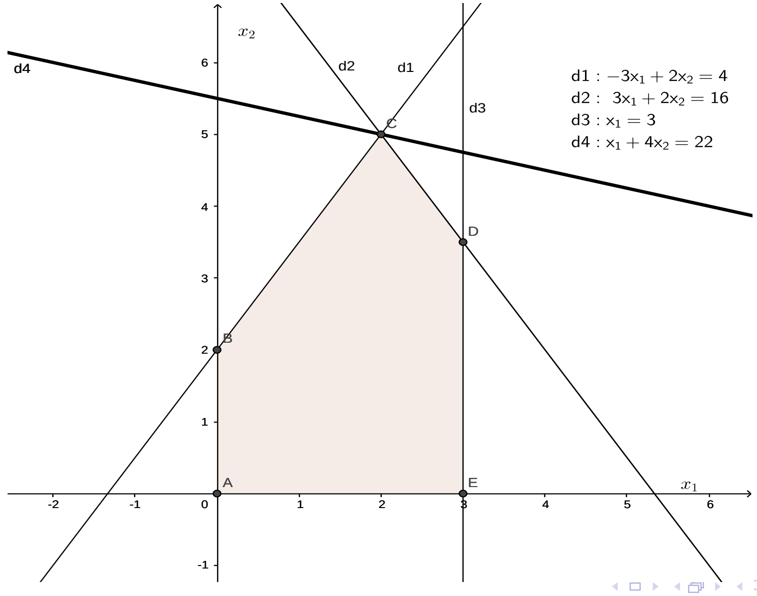


Tableau obtenu au bout de 2 itérations de l'algorithme du simplexe :

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{14}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{14}$ | 5 |
| $x_4$ | 0 | 0 | $\frac{5}{7}$ | 1 | 0 | $-\frac{6}{7}$ | 0 |
| $x_5$ | 0 | 0 | $-\frac{2}{7}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{7}$ | 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{2}{7}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{7}$ | 2 |
| | 0 | 0 | $\frac{3}{14}$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{14}$ | - 7 |

Le sommet $C = (2,5)$ courant est caractérisé par les ensembles $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ et $\mathcal{N} = \{x_3, x_6\}$.

## Illustration d'un cas de dégénérescence de deuxième espèce








À l'itération suivante, le nouveau tableau est :

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | 0 | $\frac{3}{10}$ | 5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{7}{5}$ | 0 | $-\frac{6}{5}$ | 0 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{5}$ | 1 | $-\frac{17}{35}$ | 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{2}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{5}$ | 2 |
| | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{10}$ | 0 | $-\frac{1}{10}$ | - 7 |

Le sommet $C = (2, 5)$ est caractérisé par trois solutions de base définies par les ensembles suivants :

- $\mathcal{B}_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ et $\mathcal{N}_1 = \{x_3, x_6\}$.
- $\mathcal{B}_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ et $\mathcal{N}_2 = \{x_4, x_6\}$.
- $\mathcal{B}_3 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ et $\mathcal{N}_3 = \{x_3, x_4\}$.

.





## Plan







Résolution en 2 phases :

- Phase 1 : trouver une solution de base réalisable initiale et écrire le PL sous sa forme standard relativement à cette base
- Phase 2 : trouver une solution de base optimale à partir de la solution de base initiale trouvée dans la phase 1.

Soit un PL à $p$ variables structurelles et $m$ contraintes de forme générale suivante :

$$(P) \left\{ \begin{array}{lllll} max\ f(x) = & \sum_{j=1}^{p} c_j x_j & & & \\ s.c & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1, \ldots, l \\ & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & \geq & b_i & i = l+1, \ldots, u \\ & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & = & b_i & i = u+1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, p \end{array} \right.$$

## Mise sous forme standard

Introduction de $u$ variables d'écart $x_{p+i} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, u$ :

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} max\ f(x) = & \sum_{j=1}^{p} c_j x_j & & & & & \\ s.c & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & +x_{p+i} & & = & b_i & i = 1, \ldots, l \\ & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & & -x_{p+i} & = & b_i & i = l+1, \ldots, u \\ & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & & & = & b_i & i = u+1, \ldots, m \\ & x_j & & & \geq & 0 & j = 1, \ldots, p \\ & & x_{p+i} & & \geq & 0 & i = 1, \ldots, l \\ & & & x_{p+i} & \geq & 0 & i = l+1, \ldots, u \end{array} \right.$$

On note $p + u = n \rightarrow$ Obtention d'un PL à $n$ variables





- Base partielle composée des $l$ colonnes unités associées aux variables d'écart $x_{p+i}$ $i = 1, \ldots, l$
- Pour déterminer une base initiale, on complète les colonnes unités associées aux $l$ variables d'écart avec $m - l$ colonnes unités
- Cela revient à ajouter au membre gauche de chaque contrainte $i$ ($i = l+1, \ldots, m$) initialement en inégalité $\geq$ ou en $=$ une variable $x_{n+i-l} \geq 0$ dite **variable artificielle**.





L'objectif de la phase 1 est d'éliminer ces variables artificielles (qui changent la nature du PL) en remplaçant la fonction économique à maximiser par une fonction à minimiser exprimant la somme des variables artificielles.
On considère alors le nouveau PL suivant noté $(\tilde{P})$ :

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} min\ \tilde{f}(x) = & \sum_{k=1}^{m-l} x_{n+k} & & & & & & \\ s.c & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & +x_{p+i} & & & = & b_i & i = 1, \ldots, l \\ & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & & -x_{p+i} & +x_{n+i-l} & = & b_i & i = l+1, \ldots, u \\ & \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j & & & +x_{n+i-l} & = & b_i & i = u+1, \ldots, m \\ & x_j & & & & \geq & 0 & j = 1, \ldots, p \\ & & x_{p+i} & & & \geq & 0 & i = 1, \ldots, l \\ & & & x_{p+i} & & \geq & 0 & i = l+1, \ldots, u \\ & & & & x_{n+i-l} & \geq & 0 & i = l+1, \ldots, m \end{array} \right.$$





On démontre que $(P)$ admet une solution réalisable si et seulement si $(\tilde{P})$ admet une solution de valeur nulle (solution optimale de ce problème).

### Théorème 5

*Si $(P)$ admet une solution réalisable alors $(\tilde{P})$ admet une base optimale qui est une base réalisable de $(P)$.*

Illustration numérique :

$$(P)\begin{cases} max\ z = & 2x_1 & +3x_2 & & & \\ s.c & x_1 & +x_2 & & \leq & 4 \\ & x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq & 2 \\ & x_1 & & & \geq & 1 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 5 \\ & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$





## Plan







## Dual d'un programme linéaire sous forme standard

Considérons le programme linéaire $(P)$
où $c \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n_+,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$ :

$$(P)\begin{cases} max & cx & & \\ s.c & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{cases}$$

On associe à chaque ligne $i$ de $A$ une variable $u_i \in \mathbb{R}$ appelée **variable duale**.
Ainsi $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$.
Considérons le programme linéaire $(D)$ :

$$(D)\begin{cases} min & b^t u & & \\ s.c & A^t u & \geq & c \\ & u & \in & \mathbb{R}^m \end{cases}$$





$(D)$ et $(P)$ sont très liés. On remarque que

- la matrice des contraintes de $(D)$ est la transposée de la matrice des contraintes de $(P)$
- le vecteur des coûts de $(P)$ est le vecteur des seconds membres de $(D)$ et vice-versa.

*$(D)$ est le* ***dual*** *du programme linéaire $(P)$.*
*Par opposition au dual, le programme $(P)$ est appelé* ***primal***

## Règles pour écrire le *Dual* d'un P.L. en maximisation sans passer par la forme standard (1/2)

**R1 :** À toute contrainte d'inégalité du *Primal*, associer une variable *duale* de signe contraire au sens de l'inégalité.
*(ex : à la ième contrainte primale en* $\leq$ *est associée la variable duale* $u_i \geq 0$
*à la ième contrainte primale en* $\geq$ *est associée la variable duale* $u_i \leq 0$ *)*

**R2 :** À toute contrainte d'égalité du *primal*, associer une variable *duale* sans condition de signe.
*(ex : à la ième contrainte primale en* $=$ *est associée la variable duale* $u_i \in \mathbb{R}$)





## Règles pour écrire le *Dual* d'un P.L. en maximisation sans passer par la forme standard (2/2)

**R3 :** À toute variable *non négative* du *Primal*, associer une contrainte du *Dual* en inégalité $\geq$.

**R4 :** À toute variable *sans condition de signe* du *Primal*, associer une contrainte du *Dual* en égalité.





## Relations Primal/Dual

**Théorème de la dualité faible en Programmation Linéaire** :
Soient $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ une solution réalisable de $(P)$ et $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m)$ une solution réalisable de $(D)$.

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \tilde{u}_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j$$

**Corollaire** :
Si le *Primal* (resp. le *Dual*) a une valeur infinie, alors le *Dual* (resp. le *Primal*) a un domaine vide.





## Théorème de la dualité forte en Programmation Linéaire

Si le *Primal* (resp. le *Dual*) a une valeur finie alors le *Dual* (resp. le *Primal*) également et leurs valeurs sont identiques.
Ainsi $v(P) = v(D)$.

## Théorème des écarts complémentaires (1/2)

Etant données $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$ les solutions optimales et réalisables de $(P)$ et $(D)$ respectivement avec

$$(P)\begin{cases} max\ z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ s.c & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} min\ z' = & \sum_{i=1}^{m} b_i u_i & & \\ s.c & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i & \geq c_j & j = 1, \ldots, n \\ & u_i & \geq 0 & i = 1, \ldots, m \end{cases}$$





## Théorème des écarts complémentaires (2/2)

**À l'optimum de** $(P)$ **et** $(D)$**, le produit** *variable primale* $\times$ *variable d'écart de la contrainte duale associée* **est nul et vice-versa**.

Ce qui implique les $n + m$ relations d'exclusion suivantes :

$$\forall j \quad x_j^* \times (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j) = 0$$

$$\forall i \quad u_i^* \times (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) = 0$$





Autrement dit :

- $x_j^* > 0 \Rightarrow$ la contrainte *duale* associée est saturée : $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* = c_j$
- Si la $i$ème contrainte *primale* est non saturée alors la variable *duale* associée est nulle $\Rightarrow u_i^* = 0$
- $u_i^* > 0 \Rightarrow$ la contrainte *primale* associée est saturée : $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i$
- Si la $j$ème contrainte *duale* est non saturée alors la variable *primale* associée est nulle $\Rightarrow x_j^* = 0$