Logique propositionnelle : modélisation

Question 1: Vous décidez d'acheter un billet de tombola. Le buraliste vous en présente cinq, de 1 à 5, et vous déclare :

1. Si 5 est perdant, 1 est gagnant.
2. Si 4 est perdant, 2 est gagnant.
3. Si 3 est perdant, 5 aussi.
4. Si 1 est gagnant, 2 aussi.
5. Si 3 est gagnant, 4 est perdant.

Question 2: Modélisez le problème à l'aide de la logique propositionnelle.

Correction 1: On modélise les billet pas x_i si le billet i est gagnant.

1. $\neg x_5 \Rightarrow x_1$
2. $\neg x_4 \Rightarrow x_2$
3. $\neg x_3 \Rightarrow \neg x_5$
4. $x_1 \Rightarrow x_2$
5. $x_3 \Rightarrow \neg x_4$

Question 3: Démontrez que votre choix doit se porter sur le billet 2 pour être sur de gagner par la méthode de votre choix.

Correction 2: La méthode est libre. Prenons par exemple, un raisonnement sémantique. On pose Γ l'ensemble des formules de la question 1. On cherche à montrer que $\Gamma \models x_2$.

Soit I une interprétation telle que $I \models \Gamma$. Montrons que $I \models x_2$. Deux cas sont possibles :

— Si $I \models x_3$, alors puisque $I \models x_3 \Rightarrow \neg x_4$, on sait que $I \models x_4$. Donc, puisque $I \models \neg x_4 \Rightarrow x2$, on sait que $I \models x_2$.

— Si $I \models \neg x_3$, alors puisque $I \models \neg x_3 \Rightarrow \neg x_5$, on sait que $I \models \neg x_5$. Donc, puisque $I \models \neg x_5 \Rightarrow x_1$, on sait que $I \models x_1$. On peut donc conclure puisque $I \models x_1 \Rightarrow x_2$.

Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants (où A, B et C sont des variables propositionnelles :

1. $\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C$
2. $\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$
3. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
4. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A) \vee B)$
5. $\vdash ((\neg A) \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow B$ (assez difficile)

Correction 3:

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A\wedge B)\Rightarrow C}\; ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A}\; ax \quad \dfrac{}{\Gamma\vdash B}\; ax}{\Gamma\vdash A\wedge B}\; \wedge_i}{\Gamma = ((A\wedge B)\Rightarrow C), A, B \vdash C}\; \Rightarrow_e}{\vdash ((A\wedge B)\Rightarrow C)\Rightarrow A\Rightarrow B\Rightarrow C}\; \Rightarrow_i *3$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A\Rightarrow B\Rightarrow C}\; ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A\wedge B}\; ax}{\Gamma\vdash A}\; \wedge_e^g}{\Gamma\vdash B\Rightarrow C}\; \Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A\wedge B}\; ax}{\Gamma\vdash B}\; \wedge_e^d}{\Gamma = (A\Rightarrow B\Rightarrow C), A\wedge B\vdash C}\; \Rightarrow_e}{\vdash (A\Rightarrow B\Rightarrow C)\Rightarrow((A\wedge B)\Rightarrow C)}\; \Rightarrow_i *2$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,A\vdash A\Rightarrow B}\; ax \quad \dfrac{}{\Gamma,A\vdash A}\; ax}{\Gamma,A\vdash B}\; \Rightarrow_e \qquad \dfrac{}{\Gamma,A\vdash\neg B}\; ax}{\Gamma,A\vdash\bot}\; \neg_e}{\Gamma=(A\Rightarrow B),\neg B\vdash\neg A}\; \neg_i}{\vdash (A\Rightarrow B)\Rightarrow\neg B\Rightarrow\neg A}\; \Rightarrow_i *2$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\Rightarrow B, A\vdash A\Rightarrow B}\; ax \quad \dfrac{}{A\Rightarrow B,A\vdash A}\; ax}{A\Rightarrow B,A\vdash B}\; \Rightarrow_e}{A\Rightarrow B,A\vdash\neg A\vee B}\; \vee_i^d \qquad \dfrac{\dfrac{}{A\Rightarrow B,\neg A\vdash\neg A}\; ax}{A\Rightarrow B,\neg A\vdash \neg A\vee B}\; \vee_i^g}{A\Rightarrow B\vdash\neg A\vee B}\; t.e}{\vdash (A\Rightarrow B)\Rightarrow\neg A\vee B}\; \Rightarrow_i$$

5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash(\neg A)\vee B}\; ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\neg A\vdash A}\; ax \quad \dfrac{}{\Gamma,\neg A\vdash\neg A}\; ax}{\Gamma,\neg A\vdash\bot}\; \neg_e}{\Gamma,\neg A,\neg B\vdash\bot}\; aff}{\Gamma,\neg A\vdash B}\; \bot_C \qquad \dfrac{}{\Gamma,B\vdash B}\; ax}{\Gamma=((\neg A)\vee B),A\vdash B}\; \vee_e}{\vdash((\neg A)\vee B)\Rightarrow A\Rightarrow B}\; \Rightarrow_i *2$$

Logique du premier ordre : déduction naturelle

Soit le problème suivant :

1. Tout dragon fort peut souffler le feu.
2. Un dragon rusé a toujours des cornes.
3. Aucun dragon faible n'a de cornes.

4. Les touristes ne chassent pas de dragons soufflant du feu.

Question 4: Formalisez ce problème en logique du premier ordre. Vous définirez le langage avec soin.

Correction 4:

1. $\forall x, F(x) \Rightarrow S(x)$
2. $\forall x, R(x) \Rightarrow C(x)$
3. $\forall x, \neg F(x) \Rightarrow \neg C(x)$
4. $\forall x \forall y, T(x) \Rightarrow S(y) \Rightarrow \neg Ch(x, y)$

Question 5: Montrez que les dragons rusés soufflent du feu. (assez difficile)

Correction 5:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash \forall y, F(y) \Rightarrow S(y)}\,x}{\Gamma, R(y) \vdash F(y) \Rightarrow S(y)}\,\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash \forall y, \neg F(y) \Rightarrow \neg C(y)}\,ax}{\Gamma, R(y) \vdash \neg F(y) \Rightarrow \neg C(y)}\,\forall_e}{\Gamma, R(y) \vdash C(y) \Rightarrow F(y)}\,contr \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash \forall y, R(y) \Rightarrow C(y)}\,ax}{\Gamma, R(y) \vdash R(y) \Rightarrow C(y)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash}}{\Gamma, R(y) \vdash C(y)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, R(y) \vdash F(y)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, R(y) \vdash S(y)}\,\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash R(y) \Rightarrow S(y)}\,\forall_i}{\Gamma \vdash \forall y, R(y) \Rightarrow S(y)}$$

Question 6: Montrez que les dragons rusés ne sont pas chassés par les touristes.

Correction 6:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash \forall x \forall y, T(x) \Rightarrow S(y) \Rightarrow \neg Ch(x, y)}\,ax}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash T(x) \Rightarrow S(y) \Rightarrow \neg Ch(x, y)}\,\forall_e * 2 \quad \dfrac{}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash T(x)}\,ax}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash S(y) \Rightarrow \neg Ch(x, y)}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{\text{question précédente}}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash S(y)}}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash \neg Ch(x, y)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash T(x) \Rightarrow R(y) \Rightarrow \neg Ch(x, y)}\,\Rightarrow_i *2}{\Gamma \vdash \forall x \forall y, T(x) \Rightarrow R(y) \Rightarrow \neg Ch(x, y)}\,\forall_i * 2$$

Règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

Fig. 1: Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma,\ \text{ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

Fig. 2: Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} \; (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]} \; (=_e)$$

Fig. 3: Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \; ax2$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash \bot} \; (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \; (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \; (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A} \; (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A} \; (Aff_{gen})$$

Fig. 4: Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*