Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)
Logique des propositions

13 octobre 2014

1 Exercice

Jean, Pierre et Serge sont suspectés d'avoir commis un vol. On les interroge :

— Pierre déclare : "Jean est coupable et Serge est innocent"
— Serge déclare : "Je suis innocent mais au moins l'un des autres est coupable"
— Jean déclare : "Si Pierre est coupable alors Serge l'est aussi"

1. Quelles variables propositionnelles doit on introduire pour modéliser ces déclarations.
2. Modéliser les déclarations.

Solution

1. J :"Jean est innocent"
   P :"Pierre est innocent"
   S :"Serge est innocent"
2. $$\neg J \wedge S$$
   $$S \wedge (\neg P \vee \neg J)$$
   $$\neg P \Rightarrow \neg S$$

2 Exercice

Parmi les formules suivantes lesquelles sont :satisfiables,insatisfiables, des antilogies, valides, des tautologies ?

1. $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
2. $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$
3. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg y \vee x)$

Solution

Une façon de faire est de construire la table de vérité de chaque formule. Dès que la colonne de la formule contient un 1 (vrai) elle est satisfiable. Si la colonne ne contient que des 1 elle est aussi valide, c'est une tautologie. Si la colonne ne contient que des 0 (faux) elle est insatisfiable, c'est une antilogie.

1. La table de verité de $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$ est :

x	y	$y \Rightarrow x$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

   ce qui permet de conclure que c'est une tautologie, elle est donc valide et a fortiori salifiable.

2. La table de vérité de $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$ est

x	y	z	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$x \Rightarrow y$	$x \Rightarrow z$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow$ $((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

   ce qui permet de conclure que c'est une tautologie, elle est donc valide et a fortiori salifiable.

3. La table de verité de $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg y \vee x)$ est :

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg y \vee x$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg y \vee x)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

   ce qui permet de conclure que la formule est satisfiable.

3 Exercice

On peut donner deux définitions de l'inconsistance d'un ensemble de formules $\mathcal{H}$:

1. (Sémantiquement) $\mathcal{H}$ est inconsistant si il n'existe aucune valuation qui rendent "vraies" toutes les formuless de H.
2. (syntaxiquement) Si on peut démontrer $\perp$. (en déduction naturelle et/ou en calcul des sequents)

Pour chacune de ces définitions montrer que $\mathcal{H} = \{\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}; \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}; \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}\}$ est inconsistant.

Solution

1. Sémantiquement, on construit la table de vérité de la conjonction des formules de $\mathcal{H}$.

A	B	C	$C \Rightarrow A$	$\neg B \Rightarrow C$	$\neg A \wedge \neg B$	$(C \Rightarrow A) \wedge (\neg B \Rightarrow C) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

2. Syntaxiquement on va montrer (par exemple en utilsant la déduction naturelle) $C \Rightarrow A,\ \neg B \Rightarrow C,\ \neg A \wedge \neg B \vdash \perp$

on note $\mathcal{H} = \{\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}; \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}; \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathcal{H} \vdash \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}}\,Ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\mathcal{H} \vdash \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}\,Ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\mathcal{H} \vdash \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}}\,Ax}{\mathcal{H} \vdash \neg\mathcal{B}}\,\wedge_{e1}(A)}{\mathcal{H} \vdash \mathcal{C}}\,\Rightarrow_e (\neg B)}{\mathcal{H} \vdash \mathcal{A}}\,\Rightarrow_e (C) \quad \dfrac{\dfrac{}{\mathcal{H} \vdash \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}}\,Ax}{\mathcal{H} \vdash \neg\mathcal{A}}\,\wedge_{e2}(\neg B)}{\mathcal{H} \vdash \perp}\,\perp_i (A)$$

4 Exercice

Un Rapport (évidemment très neutre ;-) sur la reforme des retraites prévoit que :

1. Si la reforme n'est pas équitable, elle devra est promue par un intense matraquage de "communication".
2. si le Medef s'en mêle, la reforme ne sera pas équitable.
3. Si la reforme est équitable, il n'y aura pas de mouvement social.

La reforme est proposée peut après. Il y a un mouvement social.

Les médias en déduisent que le Medef s'en est mêlé tandis que l'opinion publique pense avoir subit une intense campagne de "matraquage communicatif".

1. Modéliser le problème
2. Montrer que l'opinion publique a raison. (preuve en déduction naturelle).
3. quelles sont les hypothèses utiles
4. Montrer par des valeur de vérités bien choisie que les médias se trompent.

Solution

1. on introduit les propositions atomiques suivantes :
   — E : "la reforme est équitable",
   — C : "il y a une intense campagne de matraquage de communication"
   — M : "le Medef s'en mèle"
   — S : "il y a un mouvement social".
   Le rapport énonce donc :
   (a) $\neg E \Rightarrow C$
   (b) $M \Rightarrow \neg E$

(c) $E \Rightarrow \neg S$

Le fait qu'il y ait un mouvement social s'énonce :
S
La conclusion des médias est :

$$(\neg E \Rightarrow C), (M \Rightarrow \neg E), (E \Rightarrow \neg S), S \vdash M$$

ou ce qui est équivalent :

$$\vdash (\neg E \Rightarrow C) \Rightarrow (M \Rightarrow \neg E) \Rightarrow (E \Rightarrow \neg S) \Rightarrow S \Rightarrow M$$

La conclusion de l'opinion publique est :

$$(\neg E \Rightarrow C), (M \Rightarrow \neg E), (E \Rightarrow \neg S), S \vdash C$$

ou ce qui est équivalent :

$$\vdash (\neg E \Rightarrow C) \Rightarrow (M \Rightarrow \neg E) \Rightarrow (E \Rightarrow \neg S) \Rightarrow S \Rightarrow C$$

2. Le "script de preuve" (c.-à-d. la suite de règles à appliquer) est le suivant :

```
(~E=>C)=>(M=>~E)=>(E=>~S)=>S=>C
IntroImp
IntroImp
IntroImp
IntroImp

ElimImp ~E
 Axiom

 IntroNoT
 elimNot S
   Axiom

   ElimImp E
     Axiom

     Axiom
```

3. La preuve n'ulise pas le fait que $M \rightarrow\ E$ les autres sont utiles.
4. On peut construire la table de vérité de la formule

$$(\neg E \Rightarrow C) \Rightarrow (M \Rightarrow \neg E) \Rightarrow (E \Rightarrow \neg S) \Rightarrow S \Rightarrow M$$

mais ce n'est pas nécessaire. On cherche à montrer que cette formule n'est pas une tautologie, c.-à-d. qu'il existe un choix v de valeurs de vérité tel que $v[\neg E \Rightarrow C] = v[M \Rightarrow \neg E] = v[E \Rightarrow \neg S] = v[S] = 1$ et $v[M] = 0$.
On a donc les contraintes $v[M] = 0$ (ce qui entraîne $v[M \Rightarrow \neg E] = 1$) $v[S] = 1$, $v[\neg E \Rightarrow C] = v[E \Rightarrow \neg S] = 1$.
Pour avoir $v[E \Rightarrow \neg S] = 1$ avec $v[S] = 1$ il faut avoir $v[E] = 0$. Comme on doit aussi avoir $v[\neg E \Rightarrow C] = 1$ on doit avoir $v[C] = 1$.
En résumé si $(v[E], v[C], v[M], v[S]) = (0, 1, 0, 1)$ les quatre hypothèses sont vraies mais la conclusion des médias est fausse.

5 Exercice

Un newsgroups de securité comporte deux types de membres, des menteurs, qui mentent toujours, et des véridiques, qui disent toujours la vérité.

Vous voulez savoir si un programme est sans danger.

1. Vous avez des message de trois membres, Alpha, Beta et Gamma, et vous savez que deux d'entre eux sont des menteurs, et le troisième est un véridique.
2. Alpha dit « Ce programme est sans danger»
3. Beta dit « Alpha est le véridique »
4. Gamma dit « Beta ment »

Devez-vous lancer le programme ?

Modélisez le problème (y compris 1) en logique des propositions Attention, si Beta est un véridique, ce qu'il dit est vrai, mais si Beta n'est pas un véridique, ce qu'il dit est faux. Certaines des affirmations (1,2,3) seront représentées par plusieurs règles. Repondez à la question (en justifiant votre réponse) :"Devez-vous lancer le programme ?"

Solution

En posant :

```
A: alpha est un Verifique
B: Beta est un Verifique
G: Gamma est un Verifique
P: le programme est sans danger
```

Les fait se resume à l'ensemble Δ de formule :

```
(~A/\~B/\G)  \/ (~A/\B/\~G) \/  (A/\~B/\~G)
(B=>A)
(~B=>~A)
G=>~B
~G=>B
A=>P
~A=>~P
```

et on doit montrer que $\Delta \vdash \neg P$

Faire la table de verité et montre que cet ensemble de formule est réalisable P est que si P est faux. Ou montrer en déduction naturelle que l'on a $\neg P$