

Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)

Logique des propositions (suite)

olivier.pons@cnam.fr

13 octobre 2014

1 Exercice

Parmi ces formules lesquelles sont équivalentes :

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
2. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
3. $(A \wedge B) \Rightarrow C$

Solution

2 et 3 faire la table de vérité.

2 Exercice

Une association est régie par le règlement intérieur suivant :

Art1. Les membre de la direction financière doivent être choisis parmi ceux de la direction générale.

Art2. Nul ne peut être à la fois membre de la direction générale et de la direction de la bibliothèque si il n'est membre de la direction financière.

Art3. Aucun membre de la direction de la bibliothèque ne peut être membre de la direction financière.

1. Modéliser ce règlement en logique des proposition.
2. Proposer un règlement simplifier réduit à 2 articles.
3. Montrer qu'ils sont sémantiquement équivalent.
4. Montrer en déduction naturelle que le second se déduit du premier.

Solution

1. soit F,G,B les propositions atomique "appartenance à la direction financière", "appartenance à la direction générale", "appartenance à la direction de la bibliothèque". Le règlement se traduit par les formules :

(a) $F \Rightarrow G$

(b) $(G \wedge B) \Rightarrow F$

(c) $B \Rightarrow \neg F$

2. Pour que les articles 2 et 3 ne soit pas contradictoire, c'est-à-dire que l'on n'ait pas à la fois appartenance à la direction financière et la non appartenance à la direction financière, il faut :
- soit la non appartenance à la direction générale,
 - soit l'appartenance à la direction générale mais pas l' appartenance à la direction de la bibliothèque.

Ce qui se traduit par $G \Rightarrow \neg B$

F	G	B	$F \Rightarrow G$	$G \wedge B \Rightarrow F$	$B \Rightarrow \neg F$	$(a) \wedge (b) \wedge (c)$	$G \Rightarrow \neg B$	$(a) \wedge G \Rightarrow \neg B$
1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1

3. Partant de $(f \Rightarrow g) \Rightarrow ((g \wedge b) \Rightarrow f) \Rightarrow (b \Rightarrow \sim f) \Rightarrow ((f \Rightarrow g) \wedge (g \Rightarrow \sim b))$ le script pour <http://deptinfo.cnam.fr/~pons/SOFTS/deduction1.html> est :

```

-----Ax (01111)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f, |- f=>g
-----Ax (011121111)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- (g/\b)=>f
-----Ax (0111211121)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- g
-----Ax (011121112211)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b,~b, |- ~b
-----Ax (011121112212)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b,~b, |- ~b
-----IntroFaux (01112111221)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b,~b, |- Faux
-----ElimFaux (0111211122)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- b
-----IntroEt (011121112)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- g/\b
-----ElimImp (01112111)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- f
-----Ax (011121121)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- b=>~f
-----Ax (01112112211)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b,~b, |- ~b
-----Ax (01112112212)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b,~b, |- ~b
-----IntroFaux (0111211221)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b,~b, |- Faux
-----ElimFaux (011121122)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- b
-----ElimImp (01112112)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- ~f
-----ElimNon (0111211)

```

```

f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g,~~b, |- Faux
-----ElimFaux (011121)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f,g, |- ~b
-----IntroImp (01112)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f, |- g=>~b
-----IntroEt (0111)
f=>g,(g/\b)=>f,b=>~f, |- (f=>g)/\ (g=>~b)
-----IntroImp (011)
f=>g,(g/\b)=>f, |- (b=>~f)=>((f=>g)/\ (g=>~b))
-----IntroImp (01)
f=>g, |- ((g/\b)=>f)=>((b=>~f)=>((f=>g)/\ (g=>~b)))
-----IntroImp (0)
|- (f=>g)=>(((g/\b)=>f)=>((b=>~f)=>((f=>g)/\ (g=>~b))))

```

3 Exercice

- Formaliser les énoncés suivants :
 - Si le meurtre a eu lieu la nuit et sans témoin, alors Pierre est l'assassin.
 - Si le meurtre a eu lieu sans témoin alors il a eu lieu la nuit.
 - Si le meurtre a eu lieu la nuit, alors il a eu lieu sans témoin.
 - Le meurtre a eu lieu la nuit ou sans témoin.
 - Pierre est l'assassin.
- Montrez que (A), (B), (C), (D) \vdash (E)
- Montrez que (A), (B), (C), (D) \models (E)

Solution

- On note : n = la nuit, s = sans témoin, p = Pierre est l'assassin. d'ou

- $(n \wedge s) \Rightarrow p$
- $s \Rightarrow n$
- $n \Rightarrow s$
- $n \vee s$
- p

- faire la table de vérité
- $((n/\s)=>p)=>((s=>n)=>((n=>s)=>((n/\s)=>p)))$

```

introImp
introImp
introImp
introImp
elimImp n/\s
introEt
  Axiom

  ElimOu n s
    Axiom

    Axiom

```

elimImp s
Axiom

Axiom

ElimOu n s
Axiom

elimImp n
Axiom

Axiom

Axiom