



Année universitaire 2015 – 2016

**Sujet UE NFP108: Spécification et  
Modélisation Informatiques**

Examen deuxième session : 4/04/2017

Responsable : F. Barthélemy

Durée : 3 heures

**Consignes**

Tous les documents sont autorisés.

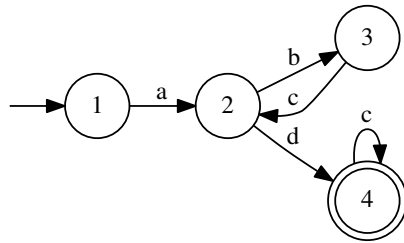
Calculatrice non autorisée

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants  
(exemple : PC, tablettes, etc) doivent être éteints et rangés dans les  
sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Sujet de 5 pages, celle-ci comprise.

→ *Vérifiez que vous disposez de la totalité des pages du sujet en début  
d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.*

## Exercice 1 : expressions régulières et automates



- Donnez le 5-upplet notant formellement cet automate.
- Cet automate est-il déterministe ? Justifiez votre réponse.
- Le langage de cet automate est-il fini ? Justifiez votre réponse.
- Le langage de cet automate est-il régulier ? Justifiez votre réponse.
- Donnez deux chaînes appartenant au langage de cet automate.
- Donnez une expression régulière définissant le même langage que cet automate.

## Exercice 2 : automates et transducteurs

### Question 1 : automates

1. Donnez un alphabet des chiffres
2. En utilisant cet alphabet, écrivez une expression régulière ou un automate qui définit l'ensemble des nombres entiers.
3. Écrivez une expression régulière ou un automate qui définit l'ensemble des nombres entiers ayant 4 chiffres ou moins de 4 chiffres.
4. Écrivez une expression régulière ou un automate qui définit l'ensemble des nombres entiers ayant plus de 4 chiffres (on ne compte pas les 0 en début de nombre quand on compte le nombre de chiffres, par exemple 018 a deux chiffres. Vous pouvez également considérer que ce n'est pas un nombre correct).

### Question 1 : transducteurs

Vous pouvez utiliser les réponses à la question précédente dans les réponses à cette question.

1. Donnez un alphabet correspondant aux booléens.
2. Écrivez un transducteur qui teste si un nombre a moins de 4 chiffres ou pas. Si en entrée, on donne un nombre de 3 chiffres, en sortie, il y a la valeur *vrai*. Si en entrée, on donne un nombre de 7 chiffres, en sortie, il y a la valeur *faux*.

### Question 4 : application du transducteur

Note : vous pouvez répondre à cette question même si vous n'avez pas répondu intégralement aux questions précédentes en supposant que le transducteur existe.

1. quel calcul faut-il effectuer pour appliquer le transducteur au nombre 157 ?
2. quel est le résultat de ce calcul ?
3. quel est le résultat de l'application du transducteur au nombre 100000000000 ?
4. un transducteur peut s'appliquer à un ensemble régulier de chaînes compilé en automate. Quel est le résultat de l'application du transducteur à l'ensemble  $\{5, 7, 12\}$  ?
5. Quel est le résultat de l'application du transducteur à l'ensemble  $\{5, 7000000, 12\}$  ?

### Exercice 3 : Logique des propositions

Une étude recente a montré que

Si les élèves jouent beaucoup au foot, ils ne révisent pas.

Si les élèves ont révisé, les résultats sont bons

Si le sujet n'est pas facile les résultats ne sont pas bons

Si il fait beau les élèves jouent beaucoup au foot

Peu après, les résultats sont bons et la direction conclut que les élèves n'ont pas joué au foot tandis que le prof se dit que son sujet était facile.

1. Modélisez ces faits en logique des propositions.
2. Montrez par un contre exemple que le raisonnement de la direction n'est pas correcte.
3. Montrez en déduction naturelle que le prof a raison.

## Exercice 4 : Deduction Naturelle en Logique des propositions

Montrez en Dédution Naturelle :

- $(B \vee \sim B) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow (\sim B \vee C)$
- $((A \wedge B) \Rightarrow \sim C) \Rightarrow (C \Rightarrow \sim (A \wedge B))$

## Exercice 5 : Logique des prédicats

Montrez en Dédution Naturelle :

$$(\forall x. \forall y. (P(x) \wedge (P(y) \Rightarrow Q(x))) \vdash \forall x. Q(x))$$

## Sémantique

Soit la formule  $F$  suivante :  $\forall x. \exists y. Q(x, y) \Rightarrow R(y, x)$

- Donnez une interprétation dans l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels qui rende  $F$  valide
  - Donnez une interprétation dans l'ensemble  $String\ll$  des chaînes de caracteres  $\gg$  qui rende  $F$  valide
- 

## Règles de la déduction naturelle

$FV(\Phi)$  désigne l'ensemble des variables libres dans la formule  $\Phi$

### Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} Ax$$

### Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \perp} \perp_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x \phi} \forall_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \phi} \exists_i$$

### Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \wedge_{e1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \wedge_{e2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} \vee_{e1}$$

$$\frac{\Gamma, \neg \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi} \perp_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]} \forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi \quad x \notin (FV(\Gamma) \cup FV(\phi))}{\Gamma \vdash \psi} \exists_e$$

Le connecteur  $\neg \phi$  est une abréviation pour  $\phi \Rightarrow \perp$ . Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \phi} \neg_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \psi} \neg_e$$