Année universitaire 2015 – 2016

Sujet UE NFP108: Spécification et Modélisation Informatiques

Examen première session : 31/01/2017

Responsable : F. Barthélemy
Durée : 3 heures

Consignes

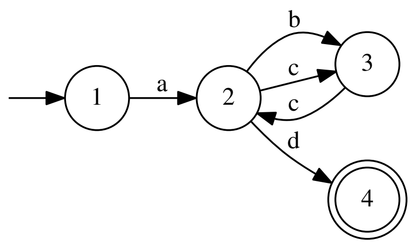
Tous les documents sont autorisés.
Calculatrice non autorisée

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (exemple : PC, tablettes, etc) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Sujet de 6 pages, celle-ci comprise.

→ *Vérifiez que vous disposez de la totalité des pages du sujet en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.*

Exercice 1 : expressions régulières et automates



- Donnez le 5-upplet notant formellement cet automate.
- Cet automate est-il déterministe ? Justifiez votre réponse.
- Le langage de cet automate est-il fini ? Justifiez votre réponse.
- Le langage de cet automate est-il régulier ? Justifiez votre réponse.
- Donnez deux chaînes appartenant au langage de cet automate.
- Donnez une expression régulière définissant le même langage que cet automate.

Exercice 2 : riches et pauvres

Un employé du ministère des finances qui a suivi le cours NFP108 pense qu'il est possible d'utiliser un transducteur fini pour savoir si un patrimoine dépasse la barre des 1,3 millions d'euros qui est le seuil à partir duquel les personnes sont assujetties à l'impôt de solidarité sur la fortune.

Son but est d'avoir un transducteur équivalent à la fonction suivante :

```
boolean superieur(int montant){
  if (montant >= 1300000)
     return true;
  else
     return false;
}
```

Pour cet exercice, vous pouvez utiliser la syntaxe opengrm ou une syntaxe plus abstraite.

Question 1 : nombres supérieurs ou égaux à 1300000

Il y a deux façons d'être plus grand que 1300000 :
- avoir plus de 7 chiffres
- avoir 7 chiffres dont les n premiers sont égaux au n premiers chiffres de 1300000 et le n+1^{ième}chiffre est supérieur au n+1^{ième}chiffre de 1300000. Par exemple 1300100 est plus grand : les 4 premiers chiffres sont égaux et le 5^{ième}est plus grand que le 5^{ième}chiffre de 1300000.

1. définissez l'alphabet des chiffres.
2. définissez au moyen d'une expression régulière ou d'un automtate fini les nombres de plus de 7 chiffres (strictement).
3. définissez au moyen d'une expression régulière ou d'un automtate fini les nombres de 7 chiffres supérieurs à 1300000
4. définissez au moyen d'une expression régulière ou d'un automtate fini les nombres de 7 chiffres égaux à 1300000
5. utilisez les expressions régulières ou automates déjà définis pour spécifier les nombres supérieurs ou égaux à 1300000

Question 2 : nombres strictement inférieurs à 1300000

Définissez avec une ou plusieurs expressions régulières ou automates l'ensemble des nombres strictement inférieurs à 1300000.

Question 3 : transducteur vers les booléens

1. donnez un alphabet correspondant aux booléens.
2. en utilisant les deux ensembles définis aux deux questions précédentes (nombres supérieurs ou égaux à 1300000, nombres strictement inférieurs à 1300000) définissez un transducteur qui prend en entrée n'importe quel nombre entier et renvoie la valeur vrai si ce nombre est plus grand ou égal à 1300000 et faux s'il est plus petit.

Note : vous pouvez répondre à cette question même si vous n'avez pas répondu intégralement aux questions précédentes en supposant que les deux ensembles existent.

Question 4 : application du transducteur

Note : vous pouvez répondre à cette question même si vous n'avez pas répondu intégralement aux questions précédentes en supposant que le transducteur existe.

1. quel calcul faut-il effectuer pour appliquer le transducteur au nombre 157 ?
2. quel est le résultat de ce calcul ?
3. quel est le résultat de l'application du transducteur au nombre 100000000000 ?
4. un transducteur peut s'appliquer à un ensemble régulier de chaînes compilé en automate. Quel est le résultat de l'application du transducteur à l'ensemble {5, 7, 12} ?
5. Quel est le résultat de l'application du transducteur à l'ensemble {5, 7000000, 12} ?

Exercice 3 : Logique des propositions

La mythologie grecque, nous append que :

> Si Zeus quitte l'Olympe alors il se change en taureau.
>
> Si Zeus se change en taureau alors Hera est en colère
>
> Si Zeus reste sur l'Olympe, Hera est en colère.

1. Modélisez ces faits en logique des propositions.
2. Un élève dissipé en conclut que forcément Zeus se change en taureau (C'est-à-dire que « Zeus se change en taureau » est une conséquence des règles précédentes).

   Montrez par un **contre-exemple** que son raisonnement est faux.

Exercice 4 : Deduction Naturelle en Logique des propositions

Montrez en Déduction Naturelle :

- $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
- $(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
- $((\neg A) \wedge \neg(B \wedge C)) \Rightarrow \neg D \ , \neg B \ , \neg A \ \vdash \neg D$

Exercice 5 : Logique des prédicats

Le petit monde du cours NFP108 se compose d'exactement deux categories de personnes : les enseignants et les auditeurs. Les auditeurs sont toujours en retard sur leurs révisions. Toute personne qui est en retard sur ses revisions doit travailler le week-end.

1. Modélisez ces informations en **logique des prédicats**
2. Montrez en Déduction Naturelle que les auditeurs doivent travailler le week-end.

Sémantique

Soit la formule F suivante : $\forall x.\exists y.Q(x,y) \vee (x = y)$
En interpretant toujours $=$ par l'égalité et Q par autre chose que l'égalité.
- Donnez une interpretation dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels qui rende F valide
- Donnez une interpretation dans l'ensemble $String$≪ des chaînes de caracteres ≫ qui rende F valide

Bonus

Que pensez vous de l'énoncé suivant ?

La phrase suivante est vraie

La phrase précédante est fausse

Règles de la déduction naturelle

$FV(\Phi)$ designe l'ensemble des variables libres dans la formule Φ

Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ Ax$$

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\ \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \perp}\ \perp_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x \phi}\ \forall_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \phi}\ \exists_i$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\ \wedge_{e1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge_{e2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\ \vee_{e1}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi}\ \perp_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}\ \forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi \quad x \notin (FV(\Gamma) \cup FV(\phi))}{\Gamma \vdash \psi}\ \exists_e$$

Le connecteur $\neg\phi$ est une abréviation pour $\phi \Rightarrow \perp$. Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \neg_e$$