Spécification et Modélisation Informatiques

NFP108

deuxième session 2015

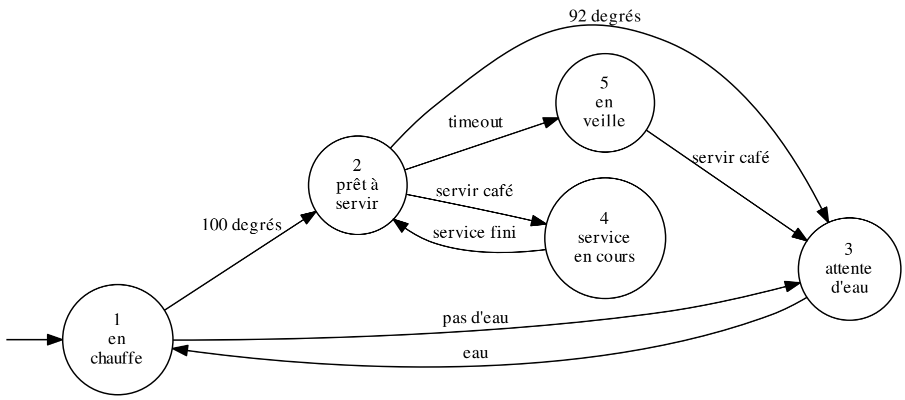
Durée : 3h
Modalités : Tous documents autorisés.

Exercice 1 : expressions régulières

1. écrivez le graphe d'un automate fini qui reconnaît le même langage que l'expression régulière $a^+b(c^*)$
2. Donnez la notation algébrique de l'automate au moyen d'un quintuplet.
3. Cet automate est-il déterministe ? Justifiez brièvement votre réponse.
4. écrivez le graphe d'un automate fini qui reconnaît le même langage que l'expression régulière $a^*(b|c)^+$
5. écrivez le graphe d'un automate fini qui reconnaît le même langage que l'expression régulière $(a^+b(c^*))|(a^*(b|c)^+)$. Notez qu'il s'agit de la disjonction des deux expressions régulières données aux questions 1 et 4.

Exercice 2 : machine à café

On cherche à modéliser le comportement d'une machine à café domestique qui comporte deux boutons : on/off, et un bouton pour commencer à servir un café. On propose l'automate fini suivant.



Les évènements sont les suivants :
- 100 degrés : l'eau de la chaudière a atteint cette température qui permet de réaliser un café.
- 92 degrés : la température de la chaudière atteint cette température et n'est plus assez chaude pour faire un café.
- pas d'eau : il n'y a pas assez d'eau dans le réservoir, la machine ne peut pas fonctionner.
- eau : de l'eau a été ajoutée en quantité suffisante pour faire du café.
- servir café : l'utilisateur a appuyé sur le bouton permettant de demander de faire un café.
- service fini : la cafetière arrête de verser du café.
- timeout : évènement survenant dix minutes après l'entrée dans l'état 2.

Questions de cours

1. cet automate est-il déterministe ?
2. le langage de cet automate est-il fini ?

Questions de modélisation

1. donnez deux chemins partant de l'état initial et permettant d'obtenir un café.
2. dans quel état y a-t-il un chauffage de l'eau ?
3. expliquez ce qui est manifestement incorrect dans cette spécification par rapport à un fonctionnement normal de machine domestique ? (réponse en moins de 5 phrases)
4. proposez une version corrigée de l'automate.

5. cette spécification ne prend pas en compte la présence ou l'absence de café. Cela correspond au fonctionnement de certaines machines où l'utilisateur met lui-même le café, alors que d'autres gèrent un stock de café. Modifiez l'automate pour que la machine réagisse à la présence/absence de café.
6. imaginez le message que pourrait afficher la machine si elle avait un petit écran d'une ligne de 30 caractères en associant un message à chaque état de l'automate.
7. donnez une spécification modifiée pour que la machine puisse faire des cafés plus ou moins serrés en versant plus ou moins d'eau sur la dose de café standard.

Exercice 3 : sémantique

Parmi les formules suivantes lesquelles ne sont pas des tautologies. **Justifier la réponse.**

1. $(A \wedge B) \Rightarrow (B \vee C)$
2. $(\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x, P(x))$
3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow A))))$
4. $(\forall x, P(x)) \Rightarrow (\exists x(P(x) \vee Q(x))$

Exercice 4 : déduction naturelle en logique des propositions

Montrer en déduction naturelle que :

```
A /\ B => (B => C) => B \/ C => C
```

Les règles sont rappelées à la fin de l'énoncé.

Exercice 5 : modelisation et preuve en logique des prédicats

Soit le problème suivant :

1. Tout dragon fort peut souffler le feu.
2. Un dragon rouge a toujours des cornes.
3. Aucun dragon faible n'a de cornes.
4. Les chasseurs ne chassent pas de dragons soufflant du feu.

1. Formalisez ce problème en logique du premier ordre. Vous définirez le langage avec soin.
2. Montrez que les dragons rouges soufflent du feu.
3. Montrez en déduction naturelle que les dragons rouges ne sont pas chassés par les chasseurs.

Règles de la déduction naturelle

$FV(\Phi)$ designe l'ensemble des variables libres dans la formule Φ

Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ Ax$$

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\ \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \bot}\ \bot_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x \phi}\ \forall_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \phi}\ \exists_i$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\ \wedge_{e1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge_{e2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\ \vee_{e1}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}\ \forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi \quad x \notin (FV(\Gamma) \cup FV(\phi))}{\Gamma \vdash \psi}\ \exists_e$$

Le connecteur $\neg\phi$ est une abréviation pour $\phi \Rightarrow \bot$. Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \neg_e$$