Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)

Première session

février 2014

Durée : 3h

Modalités : Tous documents autorisés.

---

lineTous documents autorisés.

Exercice 1 : automate

— Ecrivez un automate fini qui reconnaît le même langage que l'expression régulière $(a|b)^*(b|c)(c|d)^+$

— Donnez la notation algébrique de l'automate au moyen d'un quintuplet.

— Cet automate est-il déterministe ? Justifiez brièvement votre réponse.

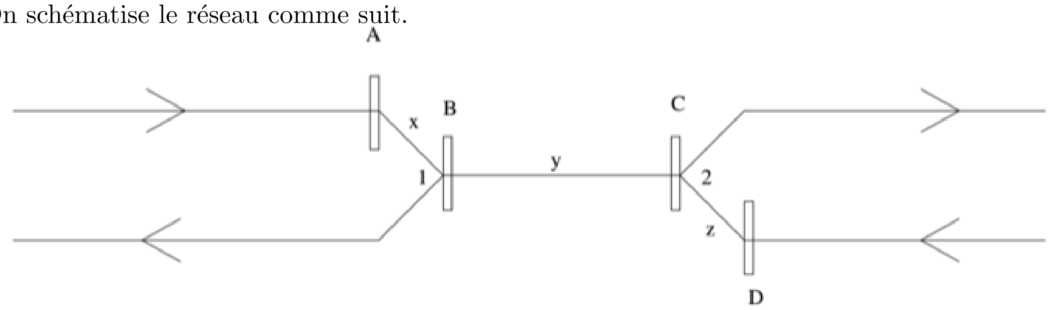
— Donnez quatre chaînes du langage de cet automate.

— Montrez que *bca* n'appartient pas au langae de cet automate.

Exercice 2 : collisions (6 points)

Une liaison de chemin de fer utilise deux voies ferrées parallèles sauf pour le franchissement d'un tunnel où il y a seulement une voie. Chaque voie est utilisée dans un seul sens sauf le tunnel qui est utilisé dans les deux sens. On souhaite modéliser une gestion des voies permettant d'éviter une collision frontale dans le tunnel. Pour aborder ce problème complexe, les ingénieurs choisissent de traiter d'abord la question avec une hypothèse simplificatrice : qu'il ne peut y avoir qu'un seul train par sens dans la portion de réseau considérée.

On schématise le réseau comme suit.



A, B, C, et D sont des capteurs optiques détectant le passage d'un train à un endroit donné. Les capteurs ne donnent pas la direction du train. La détection d'un train est un évènement qui provoque un changement d'état du système. 1 et 2 sont deux aiguillages qui peuvent être orientés soit vers le haut, soit vers le bas. La portion de voie y correspond au tunnel, x et z sont des portions permettant de réagir à l'arrivée d'un train respectivement en bas et en haut. On suppose que x et z sont assez grands pour que l'on ait le temps d'arrêter le train avant d'entrer sur y en cas de risque de collision. On suppose que l'on peut faire arrêter un train en x, en y ou en z au moyen de feux de signalisation non représentés dans la modélisation.

Les facteurs qui caractérisent l'état du système sont les suivants : la position de chaque aiguillage (vers le haut ou vers le bas), la position du train du haut (en x, en y ou dans aucun des trois segments x, y et z) et du train du bas (en y, en z ou dans aucun segment). Chacun des deux trains peut être arrêté ou en marche.

Question 1

Calculer le nombre d'états possibles au total, en croisant tous ces facteurs.

Question 2

Pour faire baisser le nombre d'états, on envisage plusieurs pistes. Pour chaque piste, dîtes si elle est raisonnable et combien d'états elle permet de gagner par rapport au nombre trouvé à la question 1.

— coordonner les deux aiguillages pour qu'ils soient tous les deux vers le bas ou tous les deux vers le haut (jamais un en haut un en bas).
— n'arrêter les trains qu'en x ou en z, car cela ne sert à rien d'immobiliser un train dans le tunnel ou hors des segments représentés.
— utiliser la symétrie entre le bas et le haut pour ne représenter qu'un des deux côtés.
— étudier les relations entre les positions des deux trains pour exclure certains états.
— étudier les relations entre les positions des trains et les aiguillages pour exclure des états.

Question 3

Ecrire l'automate (représentation graphique).

Question 4

Que pensez-vous de l'hypothèse de simplification qui ne considère qu'un seul train par sens ? Est-elle réaliste ? Est-elle une bonne façon d'aborder le problème ? (réponse en dix lignes maximum)

Exercice 3 : logique des propositions

A t'on :

1. $F \Rightarrow G, G \models F$?
2. $F \Rightarrow G, G \vdash F$?

Justifiez vos réponses.

Exercice 4 : modélisation et raisonnement

:

— Si Frodon ne va pas au Mordor, Sauron prend le pouvoir ;
— Si Sauron prend le pouvoir, Fredon est triste ;
— Si Frodon va au Mordor, il ne possède pas l'anneau ;
— Si Frodon ne possède pas l'anneau, il est triste ;

1. Modélisez ce problème en logique des propositions
2. Montrez en déduction naturelle que Frodon est triste

Exercice 5 : logique des prédicats

1. Soit la formule suivante :

$$((\forall x.F(x)) \vee (\forall x.G(x))) \Rightarrow \forall x.(F(x) \Rightarrow G(x))$$

   (a) Proposez une interprétation pour laquelle cette formule est valide et une pour laquelle elle ne l'est pas.

(b) a t'on ?

$$(\forall x.F(x)) \vee (\forall x.G(x)) \vdash \forall x.(F(x) \Rightarrow G(x))$$

2. montrez en déduction naturelle :

$$\exists x.(F \Rightarrow G) \vdash (\forall x.F) \Rightarrow (\exists x.G)$$

Règles de la déduction naturelle

$FV(\Phi)$ designe l'ensemble des variables libres dans la formule Φ

Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ Ax$$

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\ \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \bot}\ \bot_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x \phi}\ \forall_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \phi}\ \exists_i$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\ \wedge_{e2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge_{e1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\ \vee_{e1}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}\ \forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi \quad x \notin (FV(\Gamma) \cup FV(\phi))}{\Gamma \vdash \psi}\ \exists_e$$

Le connecteur $\neg\phi$ est une abréviation pour $\phi \Rightarrow \bot$. Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \neg_e$$