



# Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)



Première session  
Janvier 2009

---

Durée : 3h

Modalités : Tous documents autorisés.

---

## Exercice 1 : logique des propositions

Parmi les formules suivantes dire lesquelles sont valides, satisfiable, insatisfiable? (justifier chaque réponse).

1.  $A \Rightarrow \neg A$
2.  $(A \wedge \neg A) \Rightarrow (C \Rightarrow (B \wedge E))$
3.  $(B \Rightarrow (A \wedge \neg A))$
4.  $(A \vee \neg A) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$

## Exercice 2 : modélisation en logique de propositions

On a les faits suivants

S'il pleut, la chaussée est mouillée. Si la chaussée est mouillée je roule doucement. Si je roule doucement je serais en retard, à moins que je ne parte tôt. Or il pleut

J'en conclus que je dois partir tôt.

1. Modéliser les faits et mon raisonnement en logique de proposition.
2. Ce raisonnement est il valide? justifier la réponse.

## Exercice 3 : Dédution naturelle

Démontrer en déduction naturelle (les règles sont données ci-dessous) les formules suivantes :

1.  $(\neg(\neg A)) \Rightarrow A$
2.  $(D \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (D \Rightarrow (B \vee C))$

## Exercice 4 : logique des prédicats et modèles

Soit les formules suivantes :

1.  $F1 : \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow P(y, x)$
2.  $F2 : \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \Rightarrow P(y, z)$
3.  $F3 : \forall x (\exists y P(x, y) \Rightarrow P(x, x))$

1. Donnez 2 exemples d'interprétations où  $F1$  est vraie mais pas  $F2$ . Au moins une de vos interprétation doit se faire vers les entiers naturels.
2. Donnez 2 exemples d'interprétation où  $F2$  est vraie mais pas  $F1$ . Au moins une de vos interprétation doit se faire vers les entiers naturels.
3. Montrez que  $F1 \wedge F2 \Rightarrow F3$ . (On ne demande pas une preuve formelle en DN mais "une démonstration en français").

## Exercice 5 : Modélisation

Modélisez en théorie des ensembles ou en logique des prédicats le fonctionnement d'une caisse de retraite obéissant aux contraintes suivantes :

- Il existe deux types de pensions : les pensions de droit propre et les pensions de droit dérivé
- Tout assuré possède une et une seule pension de droit propre.
- Pour posséder une pension de droit dérivé, il faut que le conjoint de l'assuré possède une pension de droit propre et soit décédé.
- Un même assuré peut posséder plusieurs pensions de droit dérivé.

## règles de la déduction naturelle

### Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} Ax$$

Il y a ensuite deux groupe de règles :

### Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma, \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \perp} \perp_i$$

### Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \wedge_{e2} \quad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \wedge_{e1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} \vee_{e1}$$

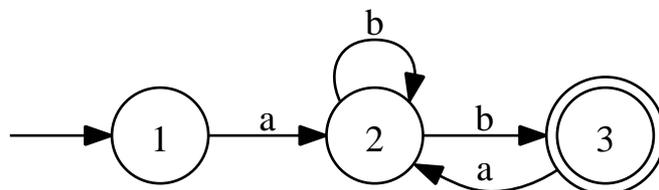
$$\frac{\Gamma, \neg \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi} \perp_e$$

Le connecteur  $\neg \phi$  est une abréviation pour  $\phi \Rightarrow \perp$ . Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \phi} \neg_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \psi} \neg_e$$

## Exercice 6 : Automate

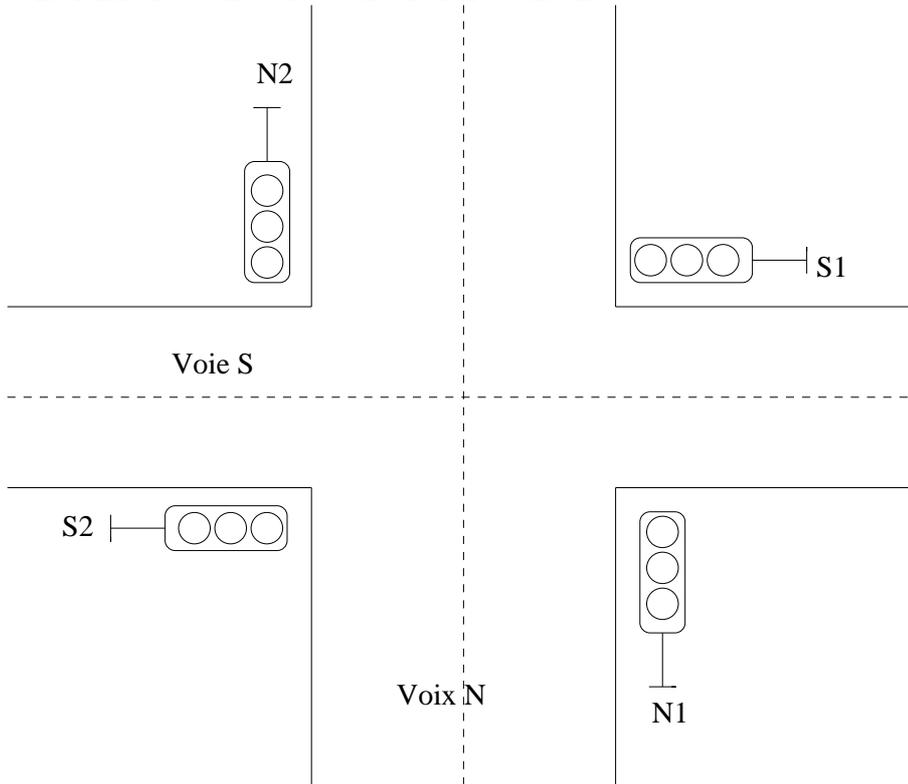


1. donnez le quintuplet  $A = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$  notant formellement cet automate.
2. montrez que cet automate est non-déterministe.
3. donnez un automate déterministe équivalent (donnez juste le résultat sous forme graphique, pas la méthode de calcul)
4. montrer que la chaîne  $abb$  appartient au langage  $L(A)$  défini par  $A$ .

5. montrer que la chaîne *abaa* n'appartient pas au langage  $L(A)$  défini par  $A$ .
6. donnez le langage  $L(A)$  sous forme d'une expression régulière. Aucune justification n'est demandée.

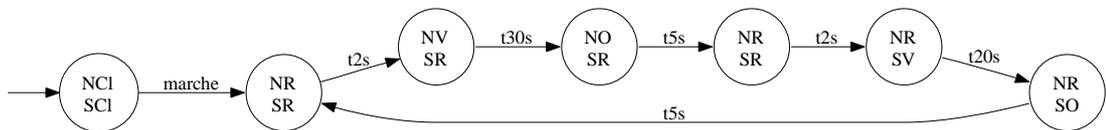
## Exercice 7 : Feux rouges

Un système de feux de signalisation règle les tours de passage à une intersection entre une route nationale N et une voie de circulation secondaire S.



L'automate suivant décrit le système. Chaque état est caractérisé par la couleur du feu : V pour vert, R pour rouge, O pour orange, Cl pour orange clignotant.

L'évènement **marche** correspond à la mise en marche du système par un opérateur appuyant sur un interrupteur de la boîte de contrôle. Les autres événements sont le déclenchement de compteurs de temps initialisés lors de l'entrée dans l'état dans lequel on se trouve. La durée est indiquée dans le nom de l'évènement. Par exemple,  $t3s$  est un évènement déclenché 3 secondes après l'arrivée dans un état.



### Question 1

1. Dans ce modèle, est ce que les deux feux d'une même route ont toujours la même couleur ?
2. Pourquoi y a-t-il deux états avec le même nom ? Peut-on les fusionner ?
3. Pourquoi n'y a-t-il pas d'état final ? Que peut-on dire du langage reconnu par cet automate ?
4. Cet automate est-il déterministe ?

5. Est-on sûr qu'un feu (ou deux) de la route N ne peut pas être au vert en même temps qu'un ou deux feux de la route S ?
6. Y a-t-il des erreurs dans la spécification donnée? Si oui lesquelles et comment les corriger (courte explication, il n'est pas nécessaire de donner la version corrigée)?

### Question 2

On va améliorer la fluidité du trafic en ajoutant deux capteurs de présence aux feux de la route S. Ces capteurs détectent la présence de véhicules en attente à ces feux. En l'absence de véhicules, les feux restent au rouge sur S et au vert sur N. S'il y a des véhicules en attente, alors les feux doivent changer, mais de telle sorte que le système ne donne pas la priorité aux véhicules de la voie S. Au contraire, il faut assurer en tout temps une plus longue durée de feu vert sur la route N que sur la route S.

Proposez un automate modifié sous forme graphique.

### Question 3

Il s'agit maintenant de prendre en compte le fait que beaucoup de voitures tournent à gauche en venant du bas du graphique. Pour assurer la fluidité, il faut prévoir une période où le feu N1 est vert et le feu N2 rouge pour permettre ce changement de direction. Modifiez en conséquence le système de la question 1 (c'est-à-dire qu'on ne prend pas en compte les capteurs dans cette question). Vous ne changerez pas le nombre de feux, c'est à dire que N1 donnera toujours la même indication de couleurs à ceux qui tournent et à ceux qui vont tout droit ou à droite.

