Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)

Première session

Avril 2011

Durée : 3h
Modalités : Tous documents autorisés.

Exercice 1 : expression régulière et automate

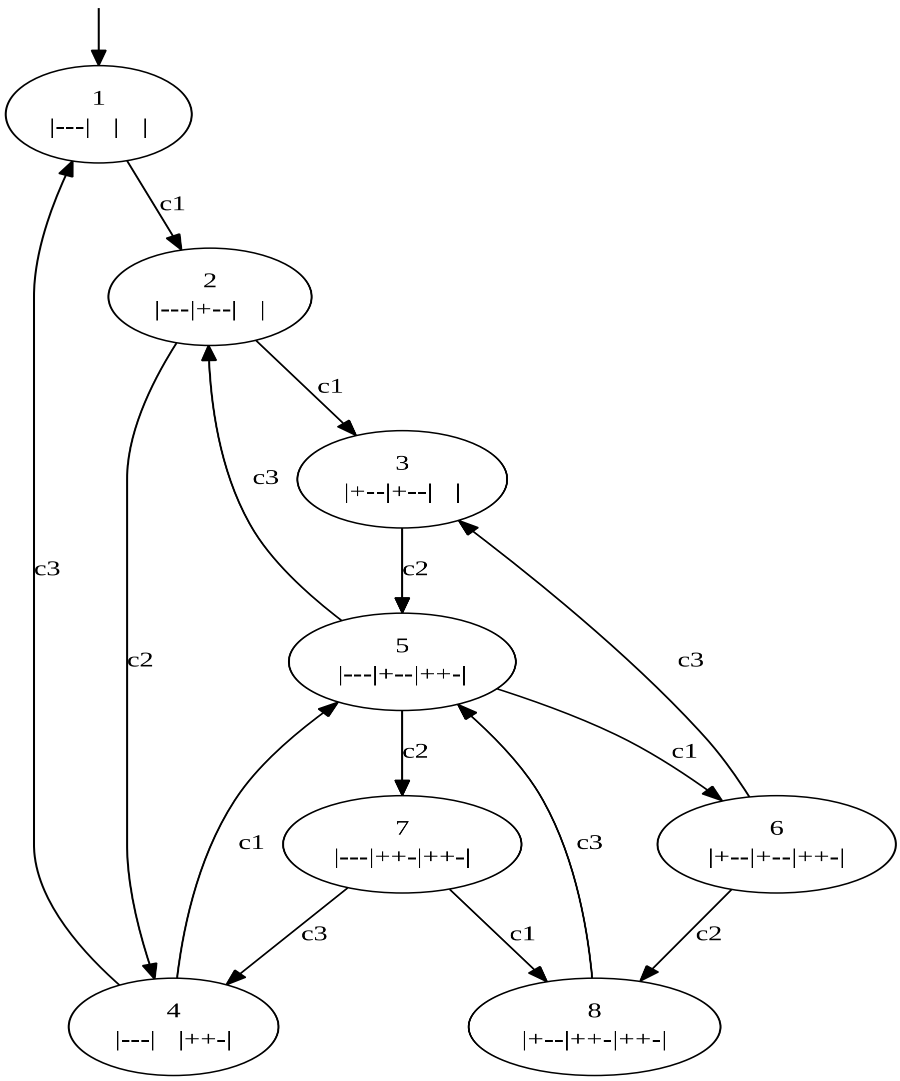
1. donnez une représentation graphique de l'automate reconnaissant le langage donné par l'expression régulière $ab((cd)^*|ce|aaa)$.
2. donnez le quintuplet notant formellement l'automate représenté à la question précédente.
3. cet automate est-il déterministe ?
4. le langage de cet automate est-il fini ?
5. donnez l'ensemble des chaînes de longueur 4 qui appartiennent à ce langage.
6. donnez l'ensemble des chaînes de longueur 5 qui appartiennent à ce langage.

Exercice 2 : travail à la chaîne

Une chaîne de production comporte trois postes de travail successifs pour enfoncer trois clous dans une planchette de bois, à trois emplacements différents. A chaque instant, en face d'un poste de travail, il y a une planchette ou pas et les clous sont enfoncés ou pas. Le but de l'automatisme est d'alimenter les postes de travail en planchettes et d'avancer celles-ci au fil de l'avancement du travail. Ce travail est représenté dans l'automate ci-dessous.

Une planchette arrive d'abord sans clous devant le premier poste de travail. Quand le premier clou est enfoncé et que le poste 2 est libre, elle est déplacée vers ce poste 2. Le deuxième clou est enfoncé et si le poste 3 est libre, elle est déplacée vers ce poste. Là, le dernier clou est enfoncé et la planchette sort alors de la chaîne.

Chaque poste est dédié à un clou bien précis : le premier poste ne peut mettre que le premier clou, etc. Les états ont un numéro et une représentation des trois postes de travail. Une planchette sans clous est représentée par —, une planchette avec un clou est représentée par +– et une planchette avec deux clous par ++-. Par exemple, l'état 2 comporte la représentation `|---|+--|   |` ce qui représente une planchette sans clou sur le premier poste, une planchette avec un clou sur le poste 2 et pas de planchette sur le poste 3. Les planchettes avec les trois clous ne sont pas représentées car elles sortent immédiatement de la chaîne. Les évènements c1, c2 et c3 notent l'enfoncement du premier, du second et du troisième clou.



On veut à présent simplifier la représentation pour ne s'intéresser qu'au poste numéro 2. Ce poste peut être en attente d'une planchette, prêt à effectuer son travail, en attente de la libération du poste trois une fois le clou enfoncé. On ne s'intéresse qu'aux évènements suivants : arrivée d'une planchette, enfoncement du clou 2, libération du poste 3.

– donnez l'automate simplifié selon ces principes.
– donnez une correspondance entre les états de votre automate et les états de l'automate donné ci-dessus.

On veut pénaliser les temps d'attente trop longs imputables à l'ouvrier du poste 2. On ne pénalise pas l'attente due aux autres postes de travail, à savoir l'attente d'une planchette venant du poste 1 ou la libération de la place permettant de transférer la planchette au poste 3. On va comptabiliser l'attente due au poste 2 seulement si elle dépasse un certain temps t. On peut supposer que le décompte du temps commence lorsqu'on arrive dans certains états et que le dépassement provoque un évènement `timeout`.

– dans quels états de votre automate faut-il lancer le chronomètre ?
– donnez l'automate augmenté avec les transitions provoquées par l'évènement `timeout`.
– est-il possible sur cet automate focalisé sur le poste 2 de détecter les temps d'attente excessifs dus aux postes 1 et 3 ? Justifiez brièvement votre réponse.

Exercice 3 : logique des propositions

1. On donne les formules $F1$ et $F2$ suivantes :

   (a) $F1 = (\neg A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow B$

   (b) $F2 = (\neg A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A \wedge C)$

   Lesquelles sont satisfiables et lesquelles sont insatisfiables (**justifier** chaque réponse).

2. On donne la formule $F3$ suivante

   (a) $F3 = ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$
      A t'on :
      i. $\models F3$?
      ii. $\vdash F3.$?

Exercice 4 : Déduction naturelle

Montrez en déduction naturelle la formule suivante (Les règles sont en annexe).

$\neg A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg B)$

Exercice 5 : modélisation

Un élève du Cnam est accusé du vol d'un sac. L'élève n'a pu voler le sac que s'il était dans l'anphi Fourastier à 18 heures le 1er avril. Mais il a été établi qu'à cette heure là, il était dans le métro. Donc il n'a pas pu voler le sac.

1. Modélisez formellement ce raisonnement.
2. Montrez que ce raisonnement n'est pas valide (donnez un contre exemple !)
3. Quelle information implicite manque-t-il ?
   (a) modélisez cette information
   (b) prouvez qu'avec cette information complémentaire le raisonnement est valide.

Exercice 6 : logique des prédicats

Soit les formules suivantes :

$$F1 = \exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow Q(y, x)$$

$$F2 = \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow Q(y, x)$$

1. Donnez une interprétation qui soit un modèle de F1 et F2.
2. Donnez une interprétation qui soit un modèle de F1 mais pas de F2.

règles de la déduction naturelle

Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ Ax$$

Il y a ensuite deux groupe de règles :

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma, \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\ \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \perp}\ \perp_i$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\ \wedge_{e2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge_{e1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\ \vee_{e1}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi}\ \perp_e$$

Le connecteur $\neg\phi$ est une abréviation pour $\phi \Rightarrow \perp$. Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \neg_e$$