



Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)

seconde session
Avril 2010



Durée : 3h

Modalités : Tous documents autorisés.

Exercice 1 : Automate

Exercice 2 : logique des propositions

Parmi les formules suivantes dire lesquelles sont satisfiable, insatisfiable parmi les satisfiables préciser lesquelles sont des tautologies? (justifier chaque réponse).

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (\neg(B \wedge C))))))$
2. $(A \wedge B \wedge C \wedge D) \Rightarrow E$
3. $A \Rightarrow ((B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A)$
4. $(A \vee \neg A) \Rightarrow (B \wedge \neg B)$

Exercice 3 : Dédution naturelle

Montrez en déduction naturelle les formules suivantes. (Les règles sont en annexe).

1. $A \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg A \vee (\neg B \vee C))))$

Exercice 4 : modélisation

Ma fille joue un match de foot, dont je rappelle rapidement quelques règles

- Un but est valide si et seulement si le ballon franchit la ligne et aucune faute n'a été commise
- Une joueuse est en faute si elle est hors-jeu ou si elle touche le ballon de la main
- Si une joueuse est placée derrière la dernière défenseuse, elle est en position de hors jeu

Pendant le match, le ballon franchi la ligne alors qu'une joueuse était placée derrière la dernière défenseuse.

L'arbitre valide le but, mécontente ma fille conteste.

Modéliser le problème et dire qui a raison (justifier la réponse soit par une preuve soit par un contre exemple!)

Exercice 5 : logique des prédicats et modèles

Soit les formules suivantes :

1. $\forall x (E(x) \Rightarrow E(x))$
2. $\forall x (S(y, x) \Rightarrow P(x, y))$
3. $(\forall x (P(x))) \vee (\forall x I(x)) \Rightarrow (\forall x (P(x) \vee I(x)))$

Questions

1. Trouvez une interprétation vers les entiers naturels qui soit un modèle de la formule 1
 2. Trouvez une interprétation vers les entiers naturels qui soit un modèle de la formule 2
 3. Trouvez une interprétation vers les entiers naturels qui soit un modèle de la formule 3
 4. parmi ces formules lesquelles sont des tautologies?
-

règles de la déduction naturelle

Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} Ax$$

Il y a ensuite deux groupe de règles :

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma, \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i1} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \perp} \perp_i$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \wedge_{e2} \quad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \wedge_{e1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} \vee_{e1}$$

$$\frac{\Gamma, \neg \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi} \perp_e$$

Le connecteur $\neg \phi$ est une abréviation pour $\phi \Rightarrow \perp$. Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \phi} \neg_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \psi} \neg_e$$

Exercice 6 : automates

1. donnez une représentation graphique de l'automate reconnaissant le langage donné par l'expression régulière $(c|(cd)^+)ba$
2. donnez le quintuplet notant formellement l'automate représenté à la question précédente.
3. cet automate est-il déterministe?
4. si cet automate est déterministe, donnez un automate équivalent non déterministe. S'il est non déterministe, donnez un automate déterministe équivalent.
5. le langage de cet automate est-il fini?
6. donnez l'ensemble des chaînes de longueur 4 qui appartiennent à ce langage.
7. donnez l'ensemble des chaînes de longueur 5 qui appartiennent à ce langage.

Exercice 7 : dates

On veut représenter au moyen d'un automate fini des dates écrites avec le jour en chiffres, le mois en toute lettres et l'année en chiffres. Les trois composantes seront séparées par un ou plusieurs espaces.

Question 1 : petits automates

1. Donnez un automate qui décrit les jours sous forme de chiffres, sauf pour le premier jour du mois qui sera noté *1er*.
2. donnez un automate qui décrit les mois en toutes lettres.
3. donnez un automate qui décrit les années entre 2000 et 2019.
4. donnez un automate qui décrit une suite d'un ou plusieurs espaces.
5. comment peut-on combiner ces quatre automates pour obtenir une date complète ?

Question 2 : raffinement

En décrivant séparément chaque élément de la date, puis en les combinant, on ne décrit pas ce qui dépend de l'interaction de deux ou trois composants élémentaires, à savoir le nombre de jours d'un mois qui dépend du mois ou du mois et de l'année pour le cas de février qui a 28 ou 29 jours selon les années. Il a 29 jours les années bissextiles, qui sont, dans l'intervalle considéré, 2004, 2008, 2012 et 2016.

On se propose de décrire dans un automate toutes les dates qui ne sont pas correctes parce qu'elles contiennent le nombre 31, 30 ou 29 dans un mois qui ne comporte pas ce numéro. Cet automate pourra être utilisé pour retirer toutes ces exceptions de l'automate écrit à la question précédente, en utilisant l'opération de différence.

Vous pouvez éventuellement décrire séparément des morceaux de l'automate des exceptions, puis donner un calcul permettant de calculer l'automate complet à partir de ces morceaux.