



Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)



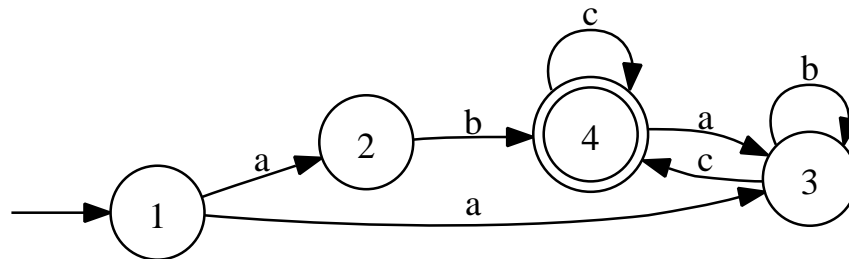
Première session
Janvier 2008

Durée : 3h

Modalités : Tous documents autorisés.

Exercice 1 : Automate

Soit l'automate **A** donné par le graphe suivant.

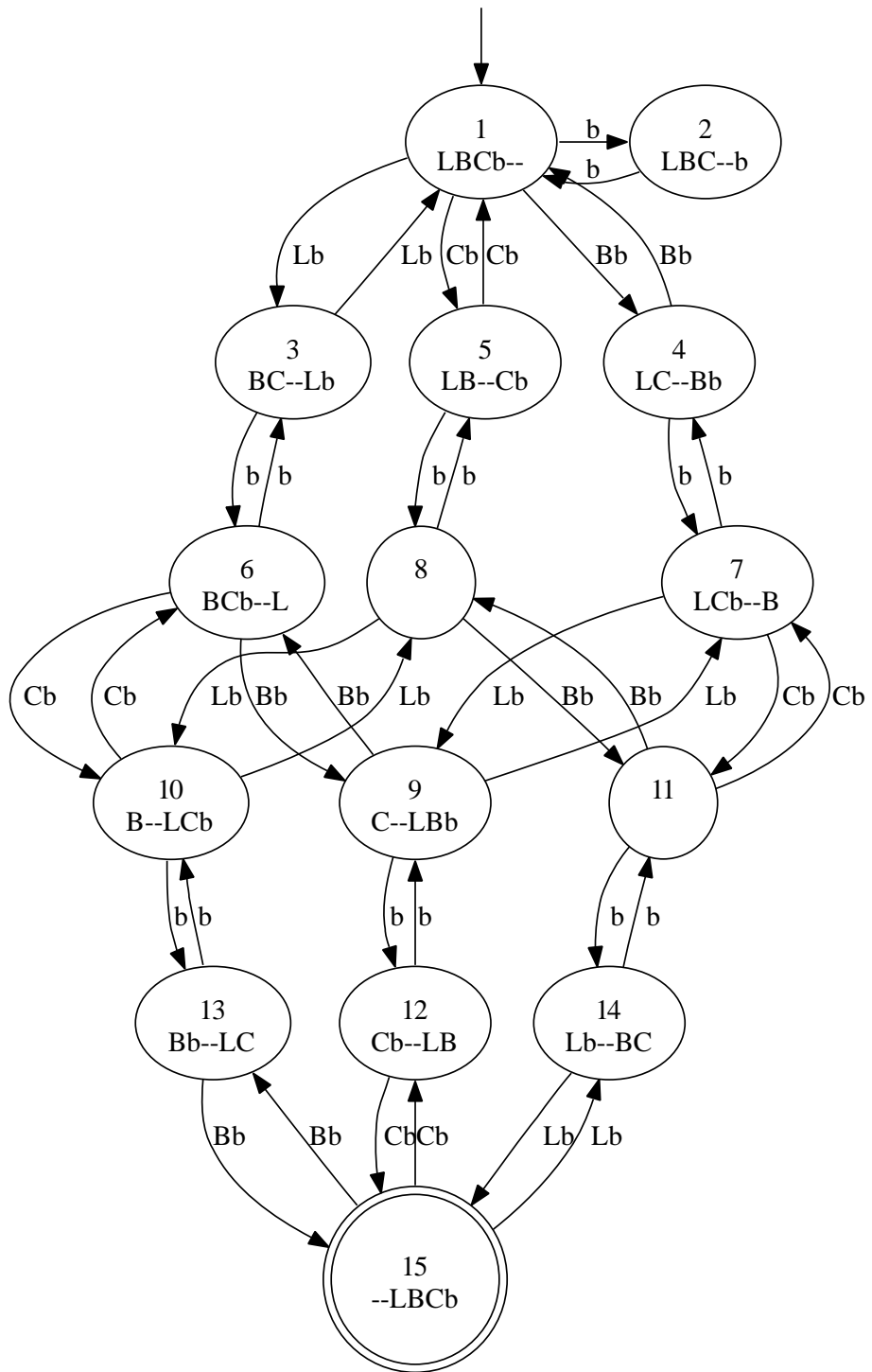


1. donnez le quintuplet $A = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ notant formellement cet automate.
2. cet automate est-il déterministe ?
3. montrer que la chaîne abc appartient au langage $L(A)$ défini par **A**.
4. montrer que la chaîne $abca$ n'appartient pas au langage $L(A)$ défini par **A**.
5. donnez le langage $L(A)$ sous forme d'une expression régulière. Aucune justification n'est demandée.

Exercice 2 : Loup, chèvre et chou

Un berger a un loup, une chèvre et un chou. Il doit leur faire traverser la rivière au moyen d'une barque. Cette barque est si petite qu'elle ne peut emporter qu'un passager (loup, chèvre ou chou) en plus du berger. La barque ne peut pas traverser sans le berger, qui est le seul à savoir ramer. Le berger peut traverser tout seul.

L'automate suivant décrit l'ensemble des états possibles pour ce système. La lettre L représente le loup, B la chèvre (B pour bique), C le chou et b le berger. Chaque transition est étiquetée par une ou deux lettres représentant les personnages qui traversent la rivière sur la barque. Dans un état, on représente la rivière par deux signes moins. Les lettres sont placées à gauche ou à droite de ce signe pour signifier que le personnage correspondant est sur la rive gauche ou la rive droite. L'état initial est un état où les quatre personnages sont à gauche de la rivière. On met donc les quatre lettres à gauche du - et cela donne l'étiquette LBCb--.



1. dans cet automate qui est censé représenter l'ensemble des états possibles, on a oublié un état. Quelle est son étiquette et comment se relie-t-il au schéma proposé ?
2. quelles sont les étiquettes des états 8 et 11, qui ont été oubliées sur le schéma ?
3. dans cet automate, les étiquettes des transitions ne précisent pas dans quel sens se fait la traversée. Par exemple, Bb précise que la chèvre et le berger traversent, mais ne précise pas si c'est de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche. Est-ce gênant ? Aurait-il été possible de faire autrement ?
4. y a-t-il plusieurs solutions pour faire passer tout le monde de la rive gauche (état initial) à la rive droite (état final) ?
5. cet automate est-il déterministe ?

On prend maintenant en compte de nouvelles contraintes, à savoir que le loup et la chèvre ne doivent pas être laissés sans la surveillance du berger sur une rive parce qu'alors le loup mange la chèvre. Même chose pour la chèvre et le chou.

1. quelles sont les conséquences de ces nouvelles contraintes sur l'automate ? Comment peut-on le modifier pour les prendre en compte ?
2. donnez un chemin succès dans cet automate modifié.
3. le langage de cet automate est-il fini ?

Exercice 3 : logique des propositions

Parmi les formules suivantes dire lesquelles sont valides, satisfiable, insatisfiable ? (justifier chaque réponse).

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge B$
2. $A \wedge B \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $(A \wedge B \wedge (B \rightarrow \neg A))$

Exercice 4 : modélisation

On a les faits suivants

Si je dors et que mes voisins font du bruit alors je m'énerve. Si Je suis fatigué je dors.

Si je ne m'énerve pas le sujet est facile. Or le sujet est difficile.

Un élève en conclut que je suis fatigué.

1. Modéliser les faits et son raisonnement en logique des propositions.
2. Ce raisonnement est-il valide ? justifier la réponse.

Exercice 5 : Dédution naturelle

Démontrer en déduction naturelle (les règles sont données à la fin du sujet) la formule suivante :

$$(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$$

Exercice 6 : logique des prédicats et modèles

Soient les formules suivantes :

1. $:(\forall x(\forall y(\forall z((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z))))))$
2. $:(\forall x(\exists yP(y, x)))$

3. : $(\forall x(\exists yG(y, x)))$

4. : $(\forall x(\forall z(P(z, f(x))) \rightarrow G(z, x)))$

1. En interprétant $P(x, y)$ par x est le père de y , $G(x, y)$ par x est un grand-père de y et f comme une fonction qui associe sa mère à chaque individu, traduire ces formules en français.
2. Donner un modèle où les formules 2 et 3 sont fausses mais la formule 1 est vraie
3. Donner un modèle où les formules 2 et 3 sont vraies mais la formule 1 est fausse
4. Donner un modèle où les formules 1, 2 et 3 sont vraies.

Exercice 7 : sémantique des programmes

Calculer la plus faible précondition :

$$Wp(if((x > 0) then y := 1; x := x + y else x := x * x, x > 9))$$

règles de la déduction naturelle

Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} Ax$$

Il y a ensuite deux groupes de règles :

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma, \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i1} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \perp} \perp_i$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \wedge_e2 \quad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \wedge_e1$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} \vee_e1$$

$$\frac{\Gamma, \neg \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi} \perp_e$$

Le connecteur $\neg \phi$ est une abréviation pour $\phi \Rightarrow \perp$. Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \phi} \neg_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \psi} \neg_e$$