

# Programmation rigoureuse (NFP209) – Examen

février 2010

2h30 – Documents autorisés

## I Sémantique

### Exercice 1

1. (3pts) Construire un arbre de dérivation de sémantique à grand pas pour la configuration suivante :  
 $\langle z:=1; \text{ while } y < x \text{ do } z:=z+1; x:=x-z \text{ done}, \sigma \rangle$   
où  $\sigma(x) = 5$  et  $\sigma(y) = 2$ .
2. (3pts) Construisez un arbre de dérivation de sémantique à petits pas pour la même configuration.

### Exercice 2

On souhaite étendre le langage impératif vu en cours avec la notion de *pointeur*. Un pointeur est une adresse mémoire. Les deux formes d'expression ajoutées sont le `new` pour créer une nouvelle adresse, et le  $\hat{\phantom{x}}$  (accent circonflexe, préfixe, voir plus bas) pour consulter la mémoire à une adresse. Plus exactement nous ajoutons une variante du `new` pour les entiers et une autre pour les booléens :

- `newi ()` retourne une adresse pointant vers un nouvel entier. La valeur de cet entier étant 0.
  - `newb ()` retourne une adresse pointant vers un nouveau booléen. La valeur de ce booléen étant `false`.
  - $\hat{x}$  désigne le contenu de l'adresse  $x$  ( $x$  doit donc être un pointeur).  $\hat{x}$  peut apparaître à droite d'un `:=` (ainsi que dans toute *expression*), mais également comme membre gauche d'un `:=` pour la modification du contenu d'une adresse.
1. (2pt) Proposez une nouvelle notion de *judgement* permettant de représenter l'état de la mémoire (en plus de l'état des variables)
  2. (4pts) Proposez une sémantique à grands pas pour le nouveau langage ainsi défini.
  3. (1pts) Construire l'arbre de dérivation pour la configuration suivante.

```
x:=newi();  
y:=x;  
 $\hat{x}$ := $\hat{x}$ +1;
```

## II Logique de Hoare

### Exercice 3

- (2pts) Démontrez la correction des triplets suivants :
- ```
{ } x:=-y; if x>y then res := true else res := false {res = true  $\Leftrightarrow$  y < 0}.
```

*Solution:*

$$\begin{array}{c}
 \text{HYP} \\
 \text{SEQ} \frac{\frac{\text{CONSEQ} \frac{\frac{\{x = -y \wedge x > y\}}{res := true}}{\{x = -y \wedge x > y \wedge res = true\}}}{\{x = -y \wedge x > y\}} \quad \frac{\text{CONSEQ} \frac{\frac{\{x = -y \wedge x \leq y\}}{res := false}}{\{x = -y \wedge x \leq y \wedge res = false\}}}{\{x = -y \wedge x \leq y\}}}{\{x = -y\} \text{if } x > y \text{ then } res := true \text{ else } res := false \{res = true \Leftrightarrow y < 0\}} \\
 \frac{\{x := -y\} \{x := -y\}}{\{x := -y; \text{ if } x > y \text{ then } res := true \text{ else } res := false \{res = true \Leftrightarrow y < 0\}}
 \end{array}$$

## Exercice 4

1. (2,5pts) Le programme suivant approche la valeur de  $a$  par dichotomie. Donnez les variants et invariants de boucles nécessaires à la preuve du triplet suivant :

```

{ x > 0 ∧ y ≥ a ∧ a > 0 }
while y - x > 1 do
  if a > (x+y)/2 then x = (x+y)/2;
  else y = (x+y)/2;
done
{ x = a ∨ y = a }

```

*Solution:*

- variant :  $y-x$
- invariant :  $x \leq a \leq y$

2. (2,5pts) Donnez les variants et invariants de boucles nécessaires à la preuve du triplet suivant :

```

{ x < 0 ∧ y < 0 }
while x + y < 0 do
  if x > 0 then y := y+x;
  else x := -x;
done
{ x ≥ 0 ∨ y ≥ 0 }

```

*Solution:*

- variant :  $-(y+x)$
- invariant :

## A Récapitulatif des règles de Hoare

### A.1 Correction partielle :

$$\begin{array}{c}
 \text{AFF1} \frac{}{\{P[x \leftarrow E]\}x:=E\{P\}} \qquad \text{AFF} \frac{}{\{P\} \quad x:=E \quad \{P[x \leftarrow x_0] \wedge x=E[x \leftarrow x_0]\}} \\
 \\
 \text{COND} \frac{\frac{\{P \wedge B\} \quad I_1 \quad \{Q\}}{\{P\} \quad \mathbf{if\ } B \mathbf{\ } \mathbf{then\ } I_1 \mathbf{\ } \mathbf{else\ } I_2 \quad \{Q\}} \quad \frac{\{P \wedge \neg B\} \quad I_2 \quad \{Q\}}{\{Q\}}}{\{P\} \quad \mathbf{if\ } B \mathbf{\ } \mathbf{then\ } I_1 \mathbf{\ } \mathbf{else\ } I_2 \quad \{Q\}} \\
 \text{SEQ} \frac{\frac{\{P\}C_1\{Q\}}{\{P\}C_1 \ ; \ C_2\{R\}} \quad \frac{\{Q\}C_2\{R\}}{\{Q\}C_2\{R\}}}{\{P\}C_1 \ ; \ C_2\{R\}} \qquad \text{WHILE} \frac{\frac{\{P \wedge B\} \quad C \quad \{P\}}{\{P\} \quad \mathbf{while\ } B \mathbf{\ } \mathbf{do\ } C \mathbf{\ } \mathbf{done} \quad \{P\}}}{\{P\} \quad \mathbf{while\ } B \mathbf{\ } \mathbf{do\ } C \mathbf{\ } \mathbf{done} \quad \{P \wedge \neg B\}} \\
 \\
 \text{CONSEQ} \frac{P \Rightarrow P' \quad \{P'\}C\{Q'\} \quad Q' \Rightarrow Q}{\{P\}C\{Q\}}
 \end{array}$$

### A.2 Correction totale :

$$\text{WHILET} \frac{\langle P \wedge B \wedge E = n \wedge E \geq 0 \rangle \quad C \quad \langle P \wedge E < n \wedge E \geq 0 \rangle}{\langle P \rangle \quad \mathbf{while\ } B \mathbf{\ } \mathbf{do\ } C \mathbf{\ } \mathbf{done} \quad \langle P \wedge \neg B \rangle}$$