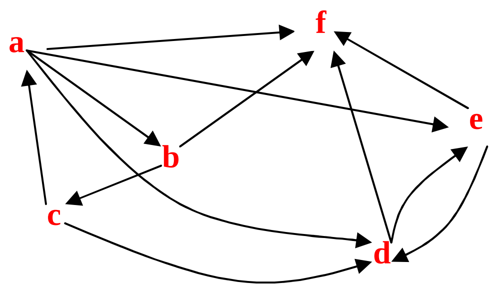
E.D. NFP 136

Thème : Graphes et parcours

Exercice 1 : Représentation, définitions et propriétés des graphes

Question 1

Soit le graphe orienté G= (X,U) suivant :



Ce graphe est-il connexe ? Donner dans ce graphe :
a) quatre chemins différents de a à f,
b) deux circuits,
c) un chemin hamiltonien,
d) les successeurs et prédécesseurs de a,
e) les successeurs et prédécesseurs de f.

Existe-t-il un circuit hamiltonien dans ce graphe ? Un cycle hamiltonien ?

Question 2

Soit G'=(X,U') le graphe partiel de G tel que U'=U-{(b,f), (c,a), (d,e), (ef)}. Soit G" le graphe non orienté obtenu à partir de G' **en oubliant l'orientation des arcs**.

Dessiner G", et donner dans G" :

f) un cycle eulérien,

g) les degrés de a, de b, et de d,

h) deux chaînes différentes entre a et d,

i) une chaîne hamiltonienne.

Existe-t-il un cycle hamiltonien dans G" ?

Question 3

Donner les matrices d'adjacence de G et G".

Exercice 2 : Forte connexité

Etant donné un graphe orienté G= (X,U), une composante fortement connexe (ou CFC) de G est un graphe partiel G'=(X',U') de G, maximal au sens de l'inclusion (c'est-à-dire que si on ajoute n'importe quel sommet à G', il perd la propriété), tel que : pour toute paire de sommets x et y de G', il existe un chemin de x vers y et un chemin de y vers x.

Si un graphe est composé d'une unique composante fortement connexe (CFC), alors le graphe lui-même est dit strictement connexe. On considère l'algorithme suivant :

```
Marquer + et – un sommet arbitraire x du graphe
Tant que c'est possible faire
     Marquer + tout successeur d'un sommet marqué +
     Marquer – tout prédécesseur d'un sommet marqué -
Fin tant que
```

Question 1

Montrer que la complexité au pire cas de cet algorithme est en O(nm), où n et m sont respectivement le nombre de sommets et d'arcs de G.

Question 2

Montrer que, à la fin de l'algorithme, il existe un chemin de x vers tout sommet marqué +, et il existe un chemin de tout sommet marqué – vers x. Que représente alors l'ensemble des sommets qui sont marqués à la fois + et - ? Comment utiliser cet algorithme pour déterminer si un graphe est fortement connexe ? Ou, s'il ne l'est pas, pour déterminer ses différentes CFC ?

Appliquer ensuite cette procédure pour déterminer si le graphe donné dans la question 1 de l'exercice 1 est fortement connexe, ou, s'il ne l'est pas, pour déterminer ses CFC.

Question 3

Le graphe réduit R d'un graphe orienté G est construit ainsi :

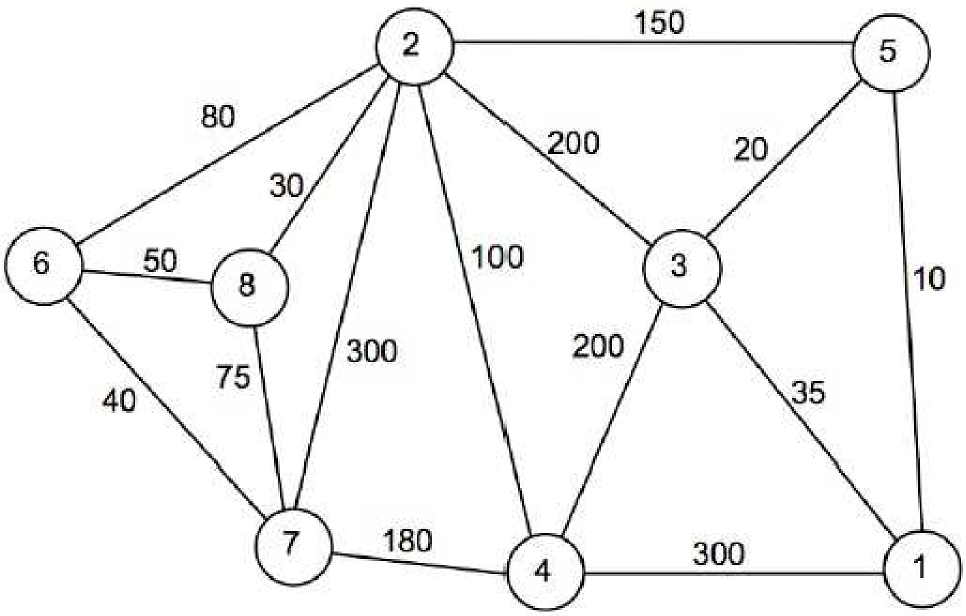
– Chaque sommet de R correspond à une CFC de G,

– Pour deux sommets i et j de R, il existe un arc (i,j) dans R s'il existe dans G au moins un arc entre un sommet de la CFC numéro i et un sommet de la CFC numéro j.

Montrer qu'un graphe réduit est toujours sans circuit, puis déterminer le graphe réduit du graphe donné dans la question 1 de l'exercice 1. Expliquer en quoi le graphe réduit peut permettre de simplifier la recherche d'un chemin (itinéraire) entre deux sommets donnés.

Exercice 3 : Parcours

Soit le graphe non orienté suivant :



Question 1

Effectuer un parcours en profondeur de ce graphe, en prenant 1 comme sommet initial (si on a le choix entre plusieurs sommets à explorer, on choisira celui de plus petit numéro). Donner tous les états de la pile associée, ainsi que l'arborescence de parcours : justifier le fait que cette arborescence correspond ici à un arbre couvrant du graphe.

Question 2

Effectuer un parcours en largeur de ce graphe, en prenant 1 comme sommet initial (si on a le choix entre plusieurs sommets à explorer, on choisira celui de plus petit numéro). Donner tous les états de la file associée, ainsi que l'arborescence de parcours : justifier le fait que cette arborescence correspond ici à un arbre couvrant du graphe. Est-il identique à celui trouvé en question 1 ?