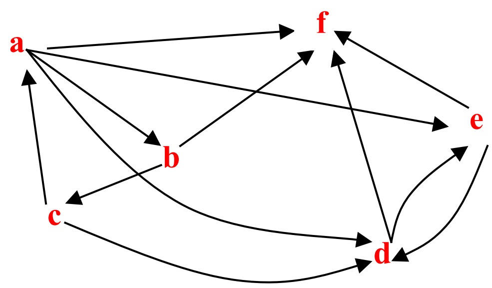
# E.D. NFP 136 n°4

## Thème : Graphes et parcours

## Exercice 1 : Représentation, propriétés et parcours de graphes

### Question 1

Soit le graphe orienté G= (X,U) suivant :




Ce graphe est-il connexe ? Donner dans ce graphe :
a) sept chemins différents de a à f,
b) deux circuits,
c) un chemin hamiltonien,
d) les successeurs et prédécesseurs de chaque sommet.

Existe-t-il un circuit hamiltonien dans ce graphe ? Un cycle hamiltonien ?

### Question 2

Soit G'=(X,U') le graphe partiel de G tel que U'=U-{(b,f), (c,a), (d,e), (ef)}. Soit G'' le graphe non orienté obtenu à partir de G' **en oubliant l'orientation des arcs**.

Dessiner G'', et donner dans G'' :

- e) un cycle eulérien,
- f) le degré de chaque sommet,
- g) deux chaînes différentes entre a et d,
- h) une chaîne hamiltonienne.

Existe-t-il un cycle hamiltonien dans G'' ?

### Question 3

Donner les matrices d'adjacence de G et G''.

### Question 4

Effectuer 2 parcours en profondeur de G puis de G'', avec comme sommet initial b, puis e. Si on a le choix entre plusieurs sommets à explorer, on choisira celui de plus petit numéro. Donner tous les états de la pile associée et l'arborescence de parcours obtenue.

## Exercice 2 : Forte connexité

Etant donnés un graphe orienté G= (X,U) et un sommet x de G, la composante fortement connexe (ou CFC) de G contenant x est l'ensemble des sommets y de G tels qu'il existe un chemin de x vers y et un chemin de y vers x. Evidemment, la CFC contenant x pour un certain sommet x est la même que celle contenant y pour tous les sommets y tels qu'il existe un chemin de x vers y et un chemin de y vers x.

Si un graphe G est composé d'une unique CFC (qui contient donc tous les sommets), alors le graphe G lui-même est dit fortement connexe. Considérons l'algorithme suivant :

```
Tant que le graphe G est non vide faire
      Faire un parcours de G à partir d'un sommet arbitraire x
      Inverser le sens des arcs de G (soit G' le graphe obtenu)
      Faire un parcours de G' à partir du même sommet x
      Retirer de G les sommets y visités au cours des deux
      parcours (ils forment une CFC)
Fin tant que
```

### Question 1

Montrer que cet algorithme a une complexité au pire cas en O(nm), où n et m sont respectivement le nombre de sommets et d'arcs de G, et qu'il identifie effectivement les CFC de G. Comment l'utiliser pour déterminer si un graphe G est fortement connexe ?

### Question 2

Appliquer ensuite cet algorithme pour déterminer si le graphe donné dans la question 1 de l'exercice 1 est fortement connexe, ou, s'il ne l'est pas, pour déterminer ses CFC. On utilisera d'abord des parcours en profondeur, puis des parcours en largeur.

### Question 3

Le graphe réduit R d'un graphe orienté G est construit ainsi :

- Chaque sommet de R correspond à une CFC de G,
- Pour deux sommets i et j de R, il existe un arc (i,j) dans R s'il existe dans G au moins un arc entre un sommet de la CFC numéro i et un sommet de la CFC numéro j.

Montrer qu'un graphe réduit est toujours sans circuit, puis déterminer le graphe réduit du graphe donné dans la question 1 de l'exercice 1. Expliquer en quoi le graphe réduit peut permettre de simplifier la recherche d'un chemin (itinéraire) entre deux sommets donnés.