Examen MOCA B2

PARTIE I
Clique maximum d'un graphe

Nous considérons un graphe non orienté $G = (X, A)$, sans boucle, avec n sommets $x_1, \ldots, x_n$ et m arêtes.

Un sous-ensemble S de sommets forme une clique si pour toute paire de sommets $\{x_i, x_j\} \in S$ on a $\{x_i, x_j\} \in A$ (les deux sommets sont reliés par une arête du graphe).

Le problème de la clique maximum consiste à déterminer une clique S de cardinalité maximale (contenant un nombre maximal de sommets du graphe).

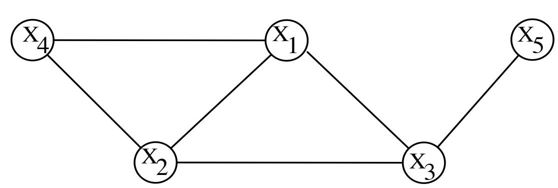

Figure 1 : $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ *est une clique*

Question 1 *Montrer pour l'exemple représenté par la Figure 1 que l'ensemble* $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ *est une clique de cardinalité maximale.*

Question 2 *Donner un deuxième ensemble de clique de cardinalité maximale.*

Soit P le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & & \\ x_1 + x_5 & \geq & 1 \\ x_2 + x_5 & \geq & 1 \\ x_3 + x_4 & \geq & 1 \\ x_4 + x_5 & \geq & 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Question 3 *Montrer qu'une solution optimale de ce programme linéaire correspond à une clique maximum pour l'exemple représenté par la Figure 1.*

Question 4 *Généraliser cette modélisation à un graphe arbitraire $G = (X, A)$ avec n sommets $x_1, \ldots, x_n$ et m arêtes.*

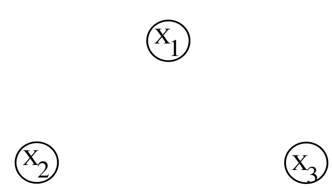

Figure 2 : *Le graphe G'*

Question 5 *Donner le programme linéaire correspondant au graphe G' représenté par la Figure 2.*

Question 6 *Donner une solution optimale du programme linéaire obtenu à la question précédente.*

Question 7 *Montrer que $x_1 = x_2 = x_3 = 1/2$ est une solution optimale de ce programme linéaire lorsque les variables ne sont plus à valeur entière mais continue.*

Question 8 *Que peut-on déduire des questions précédentes ?*

PARTIE II

EXERCICE 1

Soit le programme linéaire (P) :

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = x_1 + 19x_2 & & \\ s.c. & x_1 + 9x_2 & \leq & 28 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 20 \\ & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Question 1 : Résoudre graphiquement le problème (P).

Question 2 : Retrouver le résultat obtenu en appliquant l'algorithme primal du simplexe. (Donner la valeur de (P) et la composition de sa solution optimale et réalisable, y compris les variables d'écart associées à la forme standard)

Question 3 : Ecrire le dual (D) de (P). Quelle est sa valeur ?

Question 4 : Résoudre (D) des deux manières suivantes :

(a) Déduction à partir des relations d'exclusion après les avoir listées ;

(b) Déduction à partir du tableau optimal dual obtenu via le tableau optimal primal calculé à la **question 2** .

EXERCICE 2

On modifie la fonction objectif de (P) . On obtient le nouveau P.L. (P') suivant :

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = x_1 + x_2 & & \\ s.c. & x_1 + 9x_2 & \leq & 28 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 20 \\ & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Question 5 : Ecrire le dual (D') de (P') et les relations d'exclusion associées.

Question 6 : En quoi (D) et (D') diffèrent-ils ?

Question 7 : En utilisant les relations d'exclusion déterminer si la solution optimale de (P) est aussi optimale pour (P').

Question 8 : Appliquer l'algorithme du simplexe à (P') en démarrant de la solution optimale de (P). (Ecrire le tableau initial en exprimant la fonction objectif de (P') en fonction des variables hors-base associées à la solution optimale de (P)).
(Donner la valeur de (P') et la composition de sa solution optimale et réalisable, y compris les variables d'écart associées à la forme standard)