PARTIE I

Programmation Linéaire

EXERCICE I

Soit le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 3x_1 + \ x_2 & & \\
s.c. & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 24 \\
 & 4x_1 - x_2 & \geq & 8 \\
 & x_1 - 2x_2 & = & 0 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1 : Résoudre (P) par l'algorithme du simplexe.

N.B. :

- détailler les différentes itérations de l'algorithme,

- à la fin du déroulement, Préciser la valeur de (P) *et les valeurs optimales de toutes les variables de la forme standard.*

Question 2 : On suppose désormais ajouter au modèle (P) des contraintes d'intégrité aux variables structurelles : x_1 et x_2 entiers. On obtient un nouveau programme (P'). Déduire (en justifiant) de la résolution précédente le valeur et la solution optimale de (P').

EXERCICE II :

Soit le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{lrcl}
\max & x_1 + \ x_2 & & \\
s.c. & x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\
 & 2x_1 + x_2 - x_4 & = & 2 \\
 & -2x_1 + x_2 + x_5 & = & 2 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Après avoir effectué la phase 1 de l'algorithme du simplexe, on obtient le tableau initial de la phase 2 suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-5/2	1	1/2	0	0
x_1	1	1/2	0	-1/2	0	1
x_5	0	2	0	-1	1	4
	0	1/2	0	1/2	0	-1

Question 1 : Que signifie la valeur 0 dans la dernière colonne du tableau ?
Question 2 : Déduire du tableau la solution du problème (P) trouvée et sa valeur. Cette solution est-elle optimale ? Expliquer. Si cette solution n'est pas optimale, poursuivre le déroulement de l'algorithme du simplexe en détaillant la ou les itération(s) manquante(s) (expliciter le résultat obtenu).

PARTIE II
Une modélisation du problème du voyageur de commerce

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté complet (tous les sommets sont deux à deux adjacents) de n sommets. Chaque arête $\{i, j\}$ de A est valuée par un entier naturel c_{ij} appelé coût de l'arête $\{i, j\}$. Le tableau suivant donne un exemple de coûts pour un graphe de $n = 6$ sommets.

	1	2	3	4	5	6
1	-	10	8	21	5	11
2	-	-	3	7	4	6
3	-	-	-	15	11	3
4	-	-	-	-	14	8
5	-	-	-	-	-	13
6	-	-	-	-	-	-

Une tournée dans $G = (S, A)$ consiste en un cycle empruntant une et une seule fois chacun des n sommets de S. La longueur d'une tournée est la somme des coûts de ses arêtes. Par exemple, la tournée $T = (2, 4, 5, 1, 6, 3)$ a pour longueur $l(T) = 7 + 14 + 5 + 11 + 3 + 3 = 43$.

Le problème du voyageur de commerce consiste à déterminer une tournée de longueur minimum.

Notre objectif est de montrer que le problème du voyageur de commerce peux être modélisé par le programme linéaire suivant :

$$\min \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{i<h} x_{ih} + \sum_{j>h} x_{hj} = 2 \quad 1 \leq h \leq n \quad (2)$$

$$\sum_{i,j \in V, i<j} x_{ij} \leq |V| - 1 \quad V \subset S, 3 \leq |V| \leq \frac{n}{2} \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i,j \in S, i<j \quad (4)$$

Question 1 *Montrer que le problème du voyageur de commerce est défini si et seulement si* $n \geq 3$.

Question 2 *Donner un exemple de problème du voyageur de commerce pour* $n = 3$. *Donner une tournée optimale pour cet exemple.*

Question 3 *Montrer qu'une tournée* $(1, 2, \ldots, n)$ *est équivalente à* $(n, n-1, \ldots, 1)$. *Montrer qu'une tournée* $(1, 2, \ldots, n)$ *est équivalente à* $(i, i+1, \ldots, n, 1, \ldots, i-1)$. *En déduire que le nombre de tournées différentes est* $\frac{n!}{2n}$. *En déduire le nombre de tournées différentes pour un graphe avec* $n = 3$ *sommets.*

Question 4 *Montrer que dans toute tournée chaque sommet a exactement deux voisins. Donner un exemple de graphe à* $n = 6$ *sommets tel que chaque sommet a deux voisins mais qui ne correspond pas à une tournée.*

Question 5 *Montrer qu'un cycle de* q *sommets a* q *arêtes.*

Soit $V \subset S$ un sous-ensemble de sommets. Nous notons $\bar{V}$ le complémentaire de V (l'ensemble des sommets de S qui n'appartiennent pas à V).

Question 6 *Montrer que si* $|V| \leq \frac{n}{2}$ *alors* $|\bar{V}| \geq \frac{n}{2}$.

Soit $C \subset A$ un sous-ensemble d'arêtes tel que chaque sommet h de G a exactement deux arêtes adjacentes dans C. Soit $V \subset S$ un sous-ensemble de sommets, nous notons $m_C(V)$ le nombre d'arêtes de C qui relient deux sommets de V.

Question 7 *Montrer que si* $m_C(V) \leq |V| - 1$ *alors il existe une arête* $\{i, j\} \in C$ *telle que* $i \in V$ *et* $j \in \bar{V}$. *En déduire que les* $m_C(V)$ *arêtes qui relient deux sommets de* V *ne forment pas un cycle contenant tous les sommets de* V.

Question 8 *Donner la signification de la contrainte (4) du programme linéaire.*

Question 9 *Déduire des questions précédentes que toute solution réalisable du programme linéaire correspond à une tournée.*

Question 10 *Montrer que le programme linéaire modélise le problème du voyageur de commerce.*