Chapitre 3

Le langage du Calcul des Prédicats

Une proposition est un énoncé, un jugement pris en sa totalité.
exemple :
Le chat est noir
Il fait beau
Il ne fait pas beau
Il fait beau ou il ne fait pas beau
Les deux premières propositions sont atomiques c'est à dire indécomposables en propositions plus petites contrairement aux deux dernières qui se décomposent comme suit :
NON il fait beau
il fait beau **OU NON** il fait beau
Ce découpage en propositions est insuffisant pour rendre compte de tous les types de raisonnement. L'énoncé "le chat est noir" peut faire l'objet d'une analyse plus fine : il relie une propriété **etre noir** et un individu qui possède cette propriété **le chat**. La propriété **etre noir** s'appelle un prédicat à une place et **le chat** une constante d'individu et ces nouveaux éléments formeront le socle (les objets primitifs) sur lequel on construit les formules du calcul des prédicats. Les formules atomiques ne sont plus maintenant la donnée d'un ensemble de symboles de propositions mais seront de la forme $\mathbf{P(t)}$ où $\mathbf{P(\text{-})}$ est une symbole de prédicat et $\mathbf{t}$ un terme (un individu).

3.1 Construire des formules bien formées

3.1.1 L'alphabet

Le langage du calcul des prédicats est formé des symboles suivants :
- un ensemble de symboles de constante : a,b,c ...
- un ensemble de symboles de prédicats d'arité fixée : $A(\_)$, $B(\_)$, $P(\_,\_)$, $Q(\_,\_,\_)$, ...
- un ensemble de variables d'individus : x,y,z, ...
- un ensemble de symboles de fonctions d'arité fixée : f,g,h ...

3.1.2 les termes

Les termes sont formés à partir des règles suivantes :

1. Les constantes et les variables sont des termes.
2. Si f est un symbole de fonction d'arité n et si $t_1 \dots t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.

3.1.3 les formules atomiques

Les formules atomiques sont formées à partir de la règle suivante :

1. Si $P(\_, \dots, \_)$ est un symbole de prédicat d'arité n et si $t_1 \dots t_n$ sont des termes, alors $P(t_1, \dots, t_n)$ est une formule atomique.

3.1.4 les formules

En passant des propositions aux prédicats, nous avons augmenté le pouvoir d'expression de notre langage. Nous pouvons comme dans le calcul des propositions combiner les formules au moyen des connecteurs pour former des formules plus complexes. Mais nous allons aussi ajouter deux nouveaux constructeurs de formules qui permettent de dire quelque chose sur les termes dont parlent les formules. Ce sont les quantificateurs. Le quantificateur universel ($\forall$) permettra d'exprimer le fait que tout les individus possèdent une propriété et le quantificateur existenciel ($\exists$) permettra d'exprimer le fait qu'il existe un individu qui possèdent une propriété. Les formules sont formées à partir des règles suivantes :
- les formules atomiques sont des formules
- Si A et B sont des formules alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, (A) et $\neg A$ sont des formules
- Si A est une formule et x une variable alors $\forall x A$ et $\exists x A$ sont des formules.

3.2 Le sens des formules

Comme pour le calcul des propositions,il s'agit ici de définir la notion de vérité, en nous appuyant sur la notion d'interprétation. Mais, les formules faisant intervenir des individus, les *termes*, cela sera plus complexe.

Prenons un premier exemple :

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

Cette formule est elle valide (vraie dans tous les mondes possibles), réalisable (vraie dans au moins un monde) ou jamais vérifiée ?

- Si on se donne comme domaine de référence pour les individus les entiers Naturels, et si P signifie $\leq$,alors la formule signifie : il existe un entier plus petit ou égal a tous les autres entiers, et cette formule est vraie, car 0 est le plus petit élément sur cet ensemble.
- Si on se donne comme domaine de référence pour les individus les entiers Naturels, et si P signifie $\geq$, alors cette formule est fausse car il n'y a pas de plus grand élément sur cet ensemble
- Si on se donne comme domaine de référence $\{a, b, c\}$ pour les individus et si P est la relation définie par les couples $\{(a, b), (b, c)(c, c)\}$, alors cette formule est aussi vraie.

Cette formule est donc réalisable mais pas valide. On voit au travers de cet exemple que pour interpréter une formule du calcul des prédicats, il faut se donner à la fois un domaine pour interpréter les termes et une interprétation dans ce domaine pour chacuns des symboles de prédicats. Une fois ceci effectué, on peut interpréter la formule. Une formule de la forme $\forall x P(x)$ sera vraie dans une interprétation si tous les elements du domaine sont dans l'interpretation de P. Une formule de la forme $\exists x P(x)$ sera vraie dans une interprétation si au moins un element du domaine est dans l'interpretation de P.

Il faut faire attention à l'alternance des quantificateurs dans une formule : $\exists x \forall y P(x, y)$ n'a pas le même sens que $\forall x \exists y P(x, y)$. La première sera vraie si un même élément est en relation P avec tous les autres. La seconde sera vraie si pour chaque élément du domaine, il existe un élément avec qui il est dans la relation P. Ce dernier peut être différent à chaque fois. Par exemple, elle sera vraie dans la seconde interprétation de notre premier exemple : l'interprétation où on se donne comme domaine de référence pour les individus les entiers Naturels, et où P signifie $\geq$. En effet, pour chaque entier naturel, on peut trouver un autre entier naturel qui lui soit supérieur.

3.2.1 Definition de la validité, de la réalisabilité

Comme pour le calcul des propositions, nous allons définir la notion de vérité, en nous appuyant sur la notion d'interprétation. Mais, les formules faisant intervenir des individus, les *termes*, cela sera plus complexe. Nous définirons d'abord la notion de *d'interprétation*, qui permet d'interpréter les termes et les prédicats, et finalement celles de *satisfaction* et de *validité*.

Définir l'univers d'interprétation

On appelle ces univers, des *interprétations*. Soit L un langage du calcul des prédicats. Une *interprétation* de L est la donnée de :
- Un ensemble D non vide appelé domaine.
- Un élément de D pour chaque constante de L
- Une application de $D^n \rightarrow D$ pour chaque symbole de fonction de L
- Un ensemble de n-uplets pour chaque symbole de prédicat d'arité n.

Nous noterons $\bar{c}$ l'element associé a l'objet c de L par l'interprétation.

Satisfaction d'une formule (close) par une interprétation

Nous ne sous interessons qu'aux formules dans lesquelles toutes les variables sont sous la portée d'un quantificateur. Ces formules s'appellent des *formules closes*.

On définit par cas la relation de *satisfaction* d'une formule close par une interprétation (notée $M \models F$)
- Si $F = P(t_1, \ldots t_n)$, c'est à dire si F est une formule atomique, alors $M \models F$ ssi $(\bar{t_1}, \ldots \bar{t_n}) \in \bar{P}$
- Si $F = A \vee B$ alors $M \models F$ ssi $M \models A$ ou $M \models B$
- Si $F = A \wedge B$ alors $M \models F$ ssi $M \models A$ et $M \models B$
- Si $F = A \rightarrow B$ alors $M \models F$ ssi $M \not\models A$ ou $M \models B$
- Si $F = \neg A$ alors $M \models F$ ssi $M \not\models A$
- Si $F = \forall x P$ alors $M \models F$ ssi pour tout $c \in D$, $M \models P[x/c]$
- Si $F = \exists x P$ alors $M \models F$ ssi il existe $c \in D$ tel que $M \models P[x/c]$

Définition 1 *Une formule F est* satisfaisable *ssi il existe une interprétation M telle que $M \models F$*

Définition 2 *Une formule F est* valide *(ou est une* tautologie*) ssi pour toute interprétation M on a : $M \models F$ (noté $\models F$)*

3.3 Variables libres et liées

Nous avons parlé dans le paragraphe précédent de formules closes, c'est à dire de formules dans lesquelles toutes les variables sont sous la portée d'un quantificateur. Ceci mérite d'être vu plus en détail.

Définissons précisemment les notions de variables libres et liées :

Définition 3 *Soit x une variable et F une formule.*

- *Si $F = P(t_1, \dots t_n)$ alors toutes les occurrences de x dans F sont libres.*
- *Si $F = A * B$ (où $*$ représente un connecteur binaire), alors les occurrences libres de x dans F sont les occurrences libres de x dans A et les occurrences libres de x dans B.*
- *Si $F = \neg A$ alors les occurrences libres de x dans F sont les occurrences libres de x dans A.*
- *Si $F = \forall x P$ ou $\exists x P$ alors x n'a aucune occurrence libre dans F.*
- *Si $F = \forall y P$ ou $\exists y P$ avec $y \neq x$, alors les occurrences libres de x dans F sont les occurrences libres de x dans P*

Exemple 1 $\forall_1 x(A(x, y) \to ((\forall_2 x B(x)) \vee \exists_3 y C(x, y)))$
Les première et troisième occurrences de x sont liées par le premier quantificateur, la seconde par le second. La première occurrence de y est libre, la seconde liée.

Définition 4 *Soit x une variable et F une formule.*
Les occurrences liées *de x dans F, sont les occurrences non libres de x dans F.*
Une variable libre *de F est une variable de F dont au moins une occurrence est libre.*
Une variable liée *de F est une variable non libre de F, (ie dont toutes les occurrences sont liées).*
Une formule close *est une formule dont toutes les variables sont liées.*

remarque : Comme le nom d'une variable liée n'a pas d'importance, on peut toujours s'arranger pour qu'une variable n'ait pas à la fois des occurrences libres et liées. Par exemple la formule :
$\forall_1 x(A(x, y) \to ((\forall_2 x B(x)) \vee \exists_3 y C(x, y)))$ est logiquement équivalente à
$\forall_1 x(A(x, y) \to ((\forall_2 z B(z)) \vee \exists_3 v C(x, v)))$

Définition 5 *Soit F une formule, x une variable et t un terme.*
$F[x/t]$ désigne F dans laquelle chaque occurrence libre *de x a été remplacée par t.*

par exemple :si $F = \forall x(A(x,y) \rightarrow ((\forall x B(x)) \vee \exists y C(x,y)))$ alors
$F[x/v] = F$ et
$F[y/v] = \forall x(A(x,v) \rightarrow ((\forall x B(x)) \vee \exists y C(x,y)))$

3.4 Quelques propriétés

Voici quelques théorèmes utiles du Calcul des Prédicats

$\vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
$\vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
$\vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
$\vdash \forall x(\exists y Q(x,y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x \forall y(Q(x,y) \rightarrow P(x))$

3.5 Un prédicat particulier :l'égalité

Pour l'instant, dans notre langage, nous n'avons que des symboles de prédicats. Par exemple, dans la formule $\forall x P(x,x)$, P désigne n'importe quelle relation binaire.
Or, certaines propriétés connues sont indispensables à toutes modélisations. Nous avons donc besoin de rajouter à notre langage ces prédicats.

C'est le cas par exemple de l'égalité =.

C'est un prédicat binaire : si $t1$ et $t2$ sont des termes, alors $t1 = t2$ est une formule.

Quelles sont les propriétés que vérifie l'égalité ? L'égalité est un prédicat qui est

1. reflexif : $\forall e(e = e)$
2. symétrique : $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$
3. transitif : $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$
4. et qui a la propriété de substitution des égaux par les égaux dans n'importe quel prédicat. Cette dernière propriété est appelée *Loi de leibniz* : Pour toute formule P , $\forall x \forall y(x = y \wedge P(x) \rightarrow P(y))$

Lorsqu'on ajoute l'égalité au Calcul des prédicats, on parle de Calcul des Prédicats *avec égalité*.

3.6 Exercices

Exercice 1 *Formaliser en Calcul des prédicats les phrases suivantes :*

1. *Les baleines sont des mammifères.*
2. *Les entiers sont pairs ou impairs.*
3. *Il existe un entier pair*

Corrigé :

1. $\forall x(Baleine(x) \rightarrow Mamm(x))$
2. $\forall x(Entier(x) \rightarrow (Pair(x) \vee Impair(x)))$
3. $\exists x(Entier(x) \wedge Pair(x))$

Exercice 2 *On voudrait définir un nouveau quantificateur :* $\exists!$.
$\exists x P(x)$ *signifie : il existe au moins un individu verifiant* P*, alors que* $\exists! x P(x)$ *doit signifier qu' il existe un et un seul individu vérifiant* P.

Definir le sens de $\exists! x P(x)$ *par une formule.*
Correction : $\exists! x P(x) \overset{\text{def}}{=} \exists x P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y))$
ou encore : $\exists! x P(x) \overset{\text{def}}{=} \exists x P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x = y)$

Exercice 3 *Soient*
$P(x)$ *: x est un poisson*
$N(x)$ *: x sait nager*
(a) $\forall x(P(x) \wedge N(x))$
(b) $\forall x(P(x) \rightarrow N(x))$
(c) $\exists x(P(x) \wedge N(x))$
(d) $\exists x(P(x) \rightarrow N(x))$

1. *Trouver un modèle qui satisfait a et b.*
2. *Trouver un modèle qui satisfait b et pas a*
3. *Trouver un modèle qui satisfait c et d.*
4. *Trouver un modèle qui satisfait d et pas c.*
5. *Est il possible de trouver un modèle satisfaisant a et pas b ? Justifier votre réponse.*

Exercice 4 *Soient*
$H(x)$ *: x est un homme*
$\neg H(x)$ *: x est une femme*
$P(x)$ *: x porte des pantalons.*
$C(x)$ *: x a les cheveux longs.*

1. *Traduire en français les phrases suivantes :*
   (a) $\neg(\exists x(H(x) \wedge C(x)))$
   Aucun homme n'a les cheveux longs
   (b) $\forall x(P(x) \rightarrow H(x))$
   Tous ceux qui portent des pantalons sont des hommes. Ou encore : seuls les hommes portent des pantalons
   (c) $\forall x(H(x) \rightarrow P(x))$
   Tous les hommes portent des pantalons
2. *Trouver un modèle avec par exemple 2 hommes et 2 femmes qui satisfait b et pas c.*
   Domaine Sophie, Adele, Marius et Gaston
   Sophie Adele et Marius sont en jupe, Gaston en Pantalon. Ils ont tous les cheveux longs.
3. *Trouver un modèle qui satisfait a , b et c.*
   Domaine Sophie, Adele, Marius et Gaston
   Sophie Adele sont en jupe , Gaston et Marius en Pantalon. Ils ont tous les cheveux courts.
4. *Trouver un modèle qui satisfait a,c et pas b.*
   Domaine Sophie, Adele, Marius et Gaston
   Tous le monde en Pantalon. les filles ont les cheveux comme elles veulent et les garcons ont les cheveux courts.
5. *Traduire en formules les phrases suivantes :*
   (a) *Il n'y a pas que les hommes qui portent des pantalons.*
   $\neg\forall x(P(x) \rightarrow H(x))$ *ou*
   $\exists x(P(x) \wedge \neg H(x))$
   (b) *Personne ne porte à la fois des pantalons et les cheveux longs*
   $\neg(\exists x(P(x) \wedge C(x)))$

Exercice 5 *Soient les formules suivantes :*

1. $(H1)\exists x \exists y(x \neq y)$
2. $(H2)\forall x(R(x) \vee B(x))$

3. $(H3)\forall x \forall y (R(x) \land R(y) \rightarrow x = y)$
4. $(B)\exists x (B(x))$

1. *dessiner un modèle avec 3 individus satisfaisant les 3 premières formules.*
2. *Dans votre modèle, la formule 4 est elle vraie ?*
3. *En interprétant R par être rouge et B par être bleu, traduire ces formules.*
4. *A votre avis, la formule 4 est elle une conséquence des 3 premières formules ? Justifiez votre réponse.*

Exercice 6 *Formaliser en Calcul des Prédicats les phrases suivantes :*

1. *Tous les etudiants inscrits a un cours peuvent passer l'examen de ce cours.*
2. *Seuls les etudiants inscrits a un cours peuvent passer l'examen de ce cours.*

Exercice 7 *Il s'agit de construire un modèle partiel du fonctionnement d'une banque. Considérons les règles informelles suivantes. :*

- *Une banque gère pour ses clients deux types de comptes : les comptes* courant *et les comptes* épargne*.*
- *Chaque compte appartient à un unique client.*
- *Un client peut posséder plusieurs comptes courants mais un seul compte épargne.*

Formaliser les règles précédentes en Calcul des Prédicats
Il s'agit donc de se donner des symboles de prédicats et d'énoncer les règles au moyen de ceux ci. l'utilisation du connecteur $\exists!$ est autorisée.

- $\forall x (C(x) \rightarrow Courant(x) \lor Epargne(x))$
  $\forall x (Courant(x) \rightarrow C(x) \land \neg Epargne(x))$
  $\forall x (Epargne(x) \rightarrow C(x) \land \neg Courant(x))$
- $\forall x (C(x) \rightarrow \exists! y (Client(y) \land possede(y, x)))$
- $\forall x \forall y (Client(x), Epargne(y), possede(x, y) \rightarrow \exists! y (Epargne(y) \land possede(x, y)))$

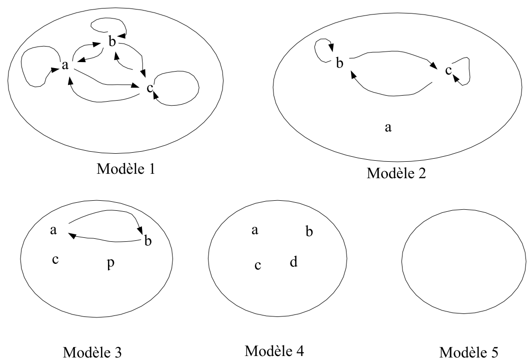
Exercice 8 *On se pose la question de savoir si le fait qu'une relation soit symétrique (A) et transitive (B) implique qu'elle soit aussi reflexive (C). Ce n'est pas le cas, et les modèles qui suivent permettent de comprendre pourqoui. Le but de cet exercice est d'ajouter une condition supplémentaire (D) telle que $A \land B \land D \rightarrow C$*

1. *traduire en calcul des prédicats les phrases suivantes :*

- *R est symetrique(A)*
- *R est transitive (B)*
- *R est reflexive (C)*

en modélisant la relation binaire R par un prédicat binaire $R()$.

2. *parmis ces modèles, lesquels rendent vrais A et B ?*



3. *même question pour C .*
4. *même question pour* $(A \wedge B) \rightarrow C$ *.*
5. *Expliquer ce qui se passe pour les modèles 2 4 et 5*
6. *Compléter la formule suivante pour qu'elle soit valide.* $A \wedge B \wedge \ldots \rightarrow C$

Corrigé :

1. – $\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$ *(A)*
   – $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$ *(B)*
   – $\forall x R(x,x)$ *(C)*
2. *1,2 ,4 et 5 rendent vraies A et B. Le modèle 3 ne verifie pas la transitivité.*
3. *Seul 1 rend vraie C*
4. *1 et 3 rendent vraie* $(A \wedge B) \rightarrow C$ *.*
5. *Dans 2 4 et 5, la relation est transitive et symetrique mais pas reflexive. Ceci est du au fait que la relation R ne concerne pas tous les éléments de l'ensemble.*
6. *Il suffit donc d'ajouter le fait que tous les éléments sont touchés par la relation :* $A \wedge B \wedge \forall x \exists y (R(x,y) \vee R(y,x)) \rightarrow C$ *En fait il suffit d'ajouter que tous les éléments de l'ensemble sont dans le domaine de R (on dit que la relation est totale).* $\forall x \exists y R(x,y)$

Exercice 9 *On vous demande de lire la spécification suivante d'une bibliothèque :*

1. $\forall e(Ex(e) \rightarrow \exists! y(L(y) \wedge Exde(e, l)))$

2. $\forall e, aa, ab(Ex(e), A(aa), A(ab), Emp(aa, e) \wedge Emp(ab, e) \rightarrow aa = ab)$

3. $\forall ea, eb((Ex(ea) \wedge Ex(eb) \wedge ea \neq eb \wedge \exists a(A(a) \wedge Emp(a, ea) \wedge Emp(a, eb))) \rightarrow \forall la, lb(Exde(ea, la) \wedge Exde(eb, lb) \wedge L(la) \wedge L(lb) \rightarrow la \neq lb))$

Voici l'interprétation des symboles de prédicats :

$Ex(\_)$*(etre un exemplaire),*
$L(\_)$ *(etre un livre)*
$A(\_)$ *(etre un abonné)*
$Emp(a, e)$ *(a emprunte l'exemplaire e) et*
$Exde(e, l)$ *(e est un exemplaire du livre l)*

1. *Donner un modèle de ces formules avec 3 exemplaires, 2 livres et 2 abonnés.*

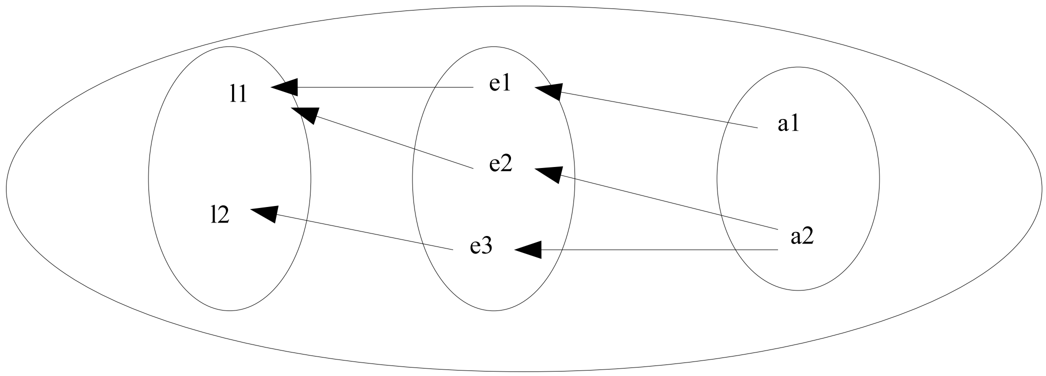
2. *Donner une interprétation avec 3 exemplaires, 2 livres et 2 abonnés qui ne vérifiant pas la formule 1*

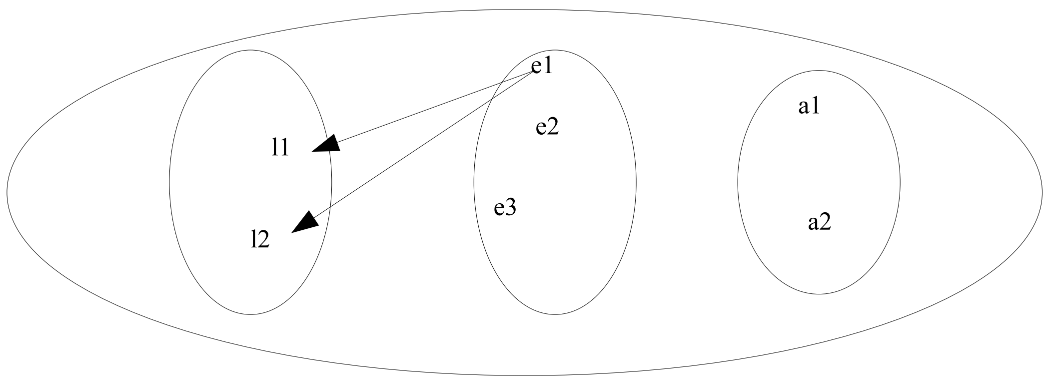
3. *Donner une interprétation avec 3 exemplaires, 2 livres et 2 abonnés qui ne vérifiant pas la formule 2*

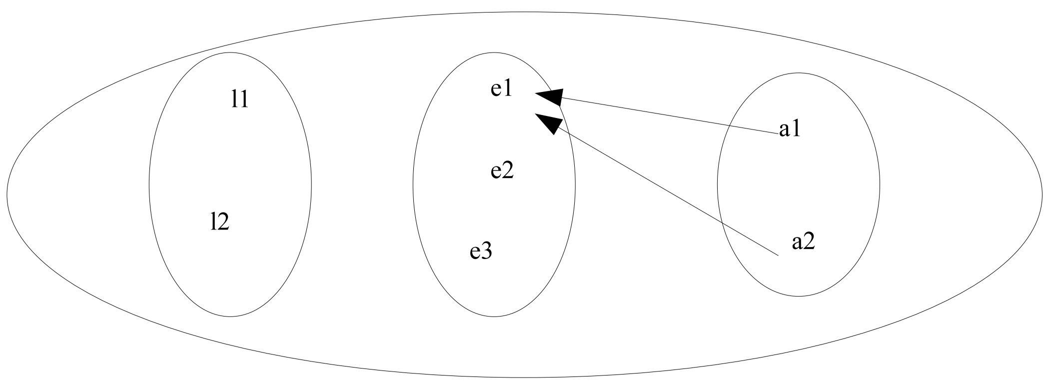
4. *Donner une interprétation avec 3 exemplaires, 2 livres et 2 abonnés qui ne vérifiant pas la formule 3*

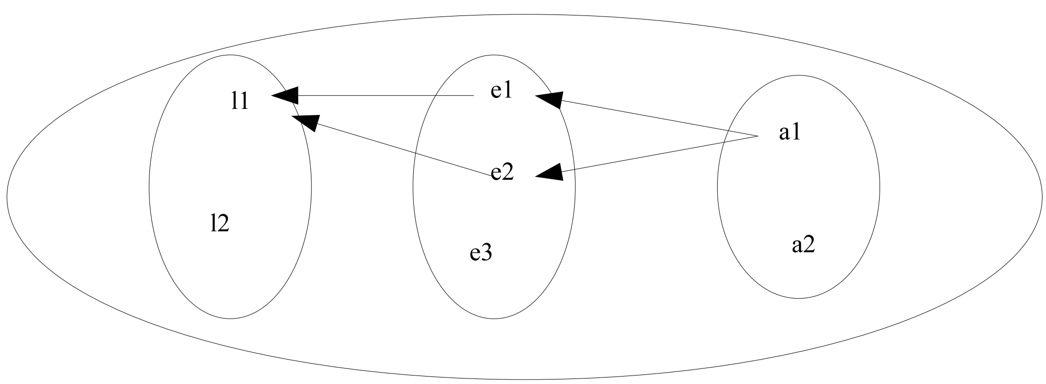
5. *Traduire ces formules en (bon) français.*

Corrigé :


l1
e1
a1
e2
l2
a2
e3


e1
a1
e2
l1
e3
l2
a2


e1
l1
a1
e2
l2
a2
e3


e1
l1
a1
e2
l2
a2
e3

1. *Un exemplaire est toujours associé à un livre. Celui ci est unique.*
2. *Un même exemplaire de livre ne peut etre emprunté par différents abonnés.*
3. *Un même abonné ne peut emprunter plus d'un exemplaire d'un même livre*

Chapitre 4

La Théorie des Ensembles

4.1 Introduction

Nous avons, dans le chapitre précédent, ajouté un prédicat particulier au calcul des prédicats : $=$. La théorie des ensembles est une théorie qui ajoute au Calcul des prédicats un prédicat supplémentaire : $\in$ l'appartenance et avec lui $\subset$.

Ceci a pour but de permettre de parler des ensembles et des éléments de ceux-ci. En effet $x \in E$ est un prédicat binaire qui signifie x est un élément de l'ensemble E.

Bien sur, pour que $\in$ ait un sens, il faut que nous connaissions des choses sur lui. Un modèle de la théorie des ensembles sera une interprétation dans laquelle toutes ces propriétés sont vraies.

La notoriété et l'utilité de cette théorie viennent du fait qu'elle suffit à modéliser l'ensemble des mathématiques. Grace a son haut pouvoir d'expression, cette théorie met à notre disposition un langage très utile pour décrire de nombreux concepts tant mathématiques qu'informatiques.

Une formule de la théorie des ensembles sera une formule du calcul des prédicats avec égalité où peut apparaitre le predicat $\in$.

Par exemple

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B$$

ou encore

$$x \in X \cup Y \leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)$$

ou encore

$$X \subset X \cup (Y \cap Z)$$

Dans les 2 derniers exemples, on voit figurer des ensembles particuliers : $X \cup Y$ et $X \cup (Y \cap Z)$. La théorie des ensembles fournit des moyens de construire des ensembles à partir d'ensembles existants (l'union, l'intersection ...).

A chaque fois, ces ensembles sont définis par une formule qui exprime quels sont leurs éléments.

4.1.1 Changement par rapport au calcul des prédicats

En calcul des prédicats, pour exprimer une propriété, on posait un symbole de prédicats : julie est une fille se traduisait par $F(julie)$. Maintenant que nous avons la notion d'ensemble, nous exprimerons les propriétés par des ensembles : $julie \in FF$. F est un prédicat, FF est un ensemble.

Si les formules atomiques changent, la structure des formules reste la même : connecteurs et quantificateurs.

Nous allons décrire les principales constructions de la théorie des ensembles.

4.2 ensembles et opérations sur les ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets : ses **éléments**. On peut définir un ensemble en décrivant ses éléments. Ceci peut se faire de deux façons : par **extension** ou par **comprehension**.

4.2.1 Définition par extension d'un ensemble

$$A = \{Anne, Bertrand, Florence\}$$

$$B = \{2, 5, 1, 9\}$$

Ces exemples définissent deux ensembles (A et B) par la donnée de leurs éléments placés entre **accolades**.
Les ensembles comme leurs éléments sont des individus au sens du Calcul des prédicats.

4.2.2 Définition par compréhension d'un ensemble

On ne peut pas toujours, notemmment lorsque les ensembles sont infinis, donner exhaustivement les éléments d'un ensemble. Heureusement, on peut aussi caractériser les éléments d'un ensemble au moyen d'une propriété :

$$C = \{\text{x} \,;\, \text{x est un entier impair}\}$$

4.2.3 Appartenance

L'expression «a est un élément de l'ensemble S »s'ecrit $a \in S$. $\in$ est un nouveau prédicat.

4.2.4 L'ensemble vide

Un ensemble joue un rôle majeur : l'ensemble qui n'a pas d'éléments. On l'appelle l'**ensemble vide** et on le note $\emptyset$.

4.2.5 Egalité entre ensembles

2 ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments :

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B$$

Ceci nous donne un moyen de démontrer que 2 ensembles sont égaux.

La réciproque, c'est à dire le fait que si 2 ensembles sont égaux alors ils ont les mêmes éléments, est évidemment vraie, mais ceci n'a rien avoir avoir les ensembles : c'est la loi de Leibniz pour l'égalité qui nous le dit, car l'appartenance est un prédicat ordinaire.
On a donc :

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B$$

Ainsi par exemple $\{\emptyset\}$ a un élément :$\emptyset$, alors que $\emptyset$ n'en a pas. On a donc : $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ et $\emptyset \in \{\emptyset\}$ et $\emptyset \neq \emptyset$

L'ordre des éléments dans un ensemble n'a pas d'importance. Il est facile de montrer que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Il n'y a donc pas moyen de différencier ces deux ensembles.

De même, on ne peut parler du nombre de fois où un élément apparait dans un ensemble. On n'ecrira donc jamais $\{a, b, a\}$ mais plutôt $\{a, b\}$.

Exercice 10 *Donner une définition par extension des ensembles suivants :*
$a = \{x; x \textit{est un mois sans la lettre } r\}$
$a = \{y; \exists x(y = x^2 \wedge y \leq 20\}$

Corrigé :
$a = \{Mai, Juin, Juillet, Aout\}$
$a = \{0, 1, 4, 9, 16\}$

4.2.6 Inclusion

Un ensemble X est un sous ensemble d'un autre ensemble Y si tous ses éléments sont aussi des élements de Y. On le note $X \subseteq Y$.

$$X \subseteq Y \leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow x \in Y)$$

On a : $A \subseteq A$ et $\emptyset \subseteq A$ pour out ensemble A

Atention à ne pas confondre $\in$ et $\subseteq$.
Par exemple : $\{4, 6, 2\} \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mais
$\{4, 6, 2\} \in \{\{3\}, \{4, 5, 6\}, 7\}$
$\{4, 6, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4.2.7 Ensembles des parties d'un ensemble

A partir d'un ensemble A, on peut construire l'ensemble de tous ses sous ensembles. Cet ensemble s'appelle l'ensemble des parties de A et se note $\mathcal{P}A$.

$$\forall a \forall s(a \in \mathcal{P}(s) \leftrightarrow \forall x(x \in a \rightarrow x \in s))$$

Si A a n éléments, alors $\mathcal{P}(A)$ en a 2^n.

Par exemple :
$A = \{a, b, c\}$ alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

4.2.8 Union, intersection et différence

Ces trois opérations permettent de combiner des ensembles existants pour en former de nouveaux.

L'**union** de 2 ensembles X et Y est constitué des objets qui sont éléments de X ou qui sont éléments de Y. On le note $X \cup Y$

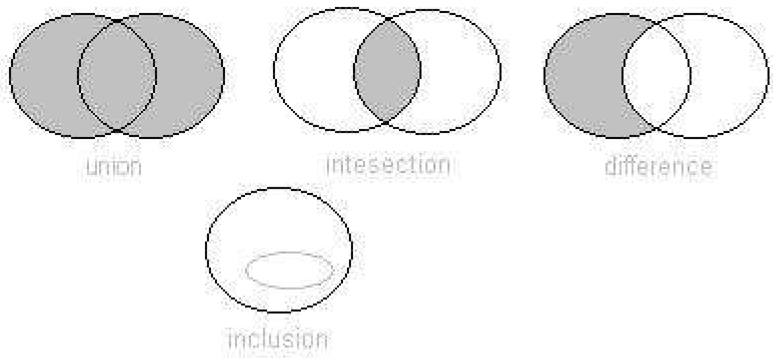
$$x \in X \cup Y \leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)$$

L'**intersection** de 2 ensembles X et Y est constitué des objets qui sont à la fois éléments de X et de de Y. On le note $X \cap Y$

$$x \in X \cap Y \leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y)$$

Le **complément** d'un ensemble Y par rapport à un ensemble X est constitué des éléments de X qui ne sont pas éléments de Y. On le note $X - Y$

$$x \in X - Y \leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y)$$



4.2.9 Restriction de la définition d'un ensemble par compréhension

On a vu que l'on pouvait d'éfinir un ensemble par comprehension, c'est à dire en donnant la propriétés que ses éléments vérifient. Ceci, utilisé sans garde fou pose problème et produit un paradoxe appelé le *paradoxe de russell* :

Définissons l'ensemble A comme l'ensemble des objets qui ne sont pas éléments d'eux même :

$$A = \{x : x \notin x\}$$

Posons nous la question suivante : A appartient il a lui même ($A \in A$) ?

- Si non , c'est a dire si $A \notin A$ alors la formule définissant A est vraie et donc $A \in A$
- Si oui, c'est à dire $A \in A$ alors la formule définissant A est fausse et donc $A \notin A$

Pour éviter ce paradoxe, il faut restreindre le principe de définition des ensembles par compréhension. Il aura la forme suivante :

$$A = \{x; \mathbf{x} \in \mathbf{B} \wedge P(x)\}$$

On exige ici que A soit formé à partir d'éléments puisés dans un ensemble préexistant B. Ainsi, on interdit la possibilité que tous le monde soit un ensemble. Par exemple, il n'y aura pas d'ensemble de tous les ensembles. Plus précisemment, cette collection ne sera pas un ensemble au sens de la théorie des ensembles.

4.2.10 couples et produit cartésien

4.3 Les relations binaires

4.3.1 définitions

Une relation de a vers b est un sous-ensemble de $a \times b$.
On définit donc *l'ensemble des relations binaires de a vers b* (noté $a \rightleftharpoons b$) par :

$$a \rightleftharpoons b \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(a \times b)$$

Considérons $R \in a \rightleftharpoons b$: Le *domaine* (*dom*) de R est l'ensemble des premières composantes des couples de R, et le *codomaine* (*ran*) l'ensemble des deuxièmes composantes :

$$dom(R) = \{x | x \in a \wedge \exists y (y \in b \wedge (x, y) \in R)\}$$

$$ran(R) = \{y | y \in b \wedge \exists x (x \in a \wedge (x, y) \in R)\}$$

Soit s un sous ensemble de a. La *restriction* de R à s ($s \lhd R$) est l'ensemble des couples de (x, y) de R tels que $x \in a$:

$$s \lhd R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | (x, y) \in R \wedge x \in s\}$$

L' *inverse* de R est définie par :

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) | (y, x) \in b \times a \wedge (x, y) \in R\}$$

La *composée* de deux relations $R \in a \rightleftharpoons b$ et $T \in b \rightleftharpoons c$ (notée $R; T$) est la relation de a vers c définie par :

$$R; T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z) | (x, z) \in a \times c \wedge \exists y ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in T)\}$$

Voici quelques autres constructions sur les relations :
$R \rhd p \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | (x, y) \in R \wedge y \in p\}$
$p \mathbin{⩤} R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | (x, y) \in R \wedge x \notin p\}$
$R \mathbin{⩥} p \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | (x, y) \in R \wedge y \notin p\}$
$R[p] \stackrel{\text{def}}{=} ran(p \lhd R)$
$R \leftarrow S \stackrel{\text{def}}{=} (dom(S) \mathbin{⩤} R) \cup S$

4.4 Les fonctions

4.4.1 Définitions

Certaines relations sont très utiles : Celles qui ont comme propriétés que tous les éléments de leur domaine ont une image unique. Ce sont les fonctions. Parmi elles on distingue les injections, c'est à dire les fonctions telles que 2 éléments différents de leur domaine ont des images distinctes, les surjections, dont tous les éléments du codomaine sont atteints, et les bijections qui sont à la fois injectives et surjectives. On distingue les fonctions totales, dont tous les éléments de l'ensemble de départ ont une image, des fonctions partielles.

Si f est une fonction, et si $x \in dom(f)$ alors il existe un unique b tel que $(a, b) \in f$. Nous l'appellerons *l'image de x par f* et le noterons $f(x)$.

D'autres part l'ensemble $\{(x, y)|(x, y) \in s \times t \wedge y = e\}$ où e est un terme ne contenant pas d'autre variable que x et tel que $\forall x(x \in s \rightarrow e \in t)$ désigne une unique fonction notée $\lambda x.(x \in s|e)$ telle que $\forall x(x \in s \rightarrow \lambda x.(x \in s|e)(x) = e$.

formellement :

fonction	$a \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} b \stackrel{\text{def}}{=}$	$\{r \| r \in a \rightleftharpoons b \wedge \forall x(x \in dom(r) \rightarrow \exists! y((x, y) \in r))\}$
fonct. totale	$a \rightarrow b \stackrel{\text{def}}{=}$	$\{f \| f \in a \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} b \wedge dom(f) = a\}$
injection	$a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\rightarrow} b \stackrel{\text{def}}{=}$	$\{f \| f \in a \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} b \wedge$ $\forall x, x'((x \in dom(f) \wedge x' \in dom(f) \wedge x \neq x') \rightarrow f(x) \neq f(x'))\}$
injection totale	$a \rightarrowtail b \stackrel{\text{def}}{=}$	$\{f \| f \in a \rightarrow b \wedge f \in a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\rightarrow} b\}$
surjection	$a \mathrel{>\!\!+\!\!\!\twoheadrightarrow} b \stackrel{\text{def}}{=}$	$\{f \| f \in a \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} b \wedge ran(f) = b\}$
surj. totale	$a \twoheadrightarrow b \stackrel{\text{def}}{=}$	$\{f \| f \in a \rightarrow b \wedge f \in a \mathrel{>\!\!+\!\!\!\twoheadrightarrow} b\}$

4.4.2 Propriétés directes

$(fonctpa) : \forall a \forall b (a \mathrel{+\!\!\!\to} b = \{r \mid r \in a \rightleftharpoons b \wedge$ $\forall x (x \in dom(r) \to \exists! y ((x,y) \in r))\})$ $(fonctpa_1) : \forall f \forall a \forall b (f \in a \mathrel{+\!\!\!\to} b \leftrightarrow$ $f \in a \rightleftharpoons b \wedge \forall x (x \in dom(f) \to \exists! y ((x,y) \in f)))$
$(fonct) : \forall a \forall b (a \to\ b = \{f \mid f \in a \mathrel{+\!\!\!\to} b \wedge dom(f) = a\})$ $(fonct_1) : \forall f \forall a \forall b (f \in a \to\ b \leftrightarrow f \in a \mathrel{+\!\!\!\to} b \wedge dom(f) = a)$
$(injpa) : \forall a \forall b (a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\to} b = \{f \mid f \in a \mathrel{+\!\!\!\to} b \wedge$ $\forall x, x' (x \in dom(f), x' \in dom(f), x \neq x' \to f(x) \neq f(x'))\})$ $(injpa_1) : \forall f \forall a \forall b (f \in a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\to} b \leftrightarrow f \in a \mathrel{+\!\!\!\to} b \wedge$ $\forall x, x' (x \in dom(f), x' \in dom(f), x \neq x' \to f(x) \neq f(x')))$
$(inj) : \forall a \forall b (a \rightarrowtail b \stackrel{\text{def}}{==} \{f \mid f \in a \to\ b \wedge f \in a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\to} b\})$ $(inj_1) : \forall f \forall a \forall b (f \in a \rightarrowtail b \leftrightarrow f \in a \to\ b \wedge f \in a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\to} b)$
$(surjpa) : \forall a \forall b (a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\twoheadrightarrow} b = \{f \mid f \in a \mathrel{+\!\!\!\to} b \wedge ran(f) = b\})$ $(surjpa_1) : \forall f \forall a \forall b (f \in a \leftrightarrow f \in a \mathrel{+\!\!\!\to} b \wedge ran(f) = b)$
$(surj) : \forall a \forall b (a \twoheadrightarrow\ b = \{f \mid f \in a \to\ b \wedge f \in a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\twoheadrightarrow} b\})$ $(surj_1) : \forall f \forall a \forall b (f \in a \leftrightarrow f \in a \to\ b \wedge f \in a \mathrel{>\!\!\!+\!\!\!\twoheadrightarrow} b)$

4.5 Les entiers Naturels

4.5.1 Qu'est ce que $\mathcal{N}$?

L'ensemble des entiers naturels est une suite $0, 1, 2 \ldots$.
. Plus précisemment, c'est une suite infinie avec un plus petit élément. On peut atteindre tous les entiers en se donnant 0 et une opération *successeur*. Fondamentalement , $\mathcal{N}$ est le plus petit ensemble contenant 0 et clos par l'opération *successeur*.

4.5.2 Définition de fonctions par récurrence

Nous avons un ensemble particulier : l'ensemble des entiers naturels. Puisque nous avons aussi défini la notion de fonctions d'ensembles vers d'autres

ensembles dans la théorie, nous savons qu'il existe des fonctions sur les entiers.
Nous pouvons montrer par exemple que

$$S \in \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$$

Nous pouvons appliquer tous les opérateurs sur les fonctions existantes sur les entiers pour définir de nouvelles fonctions. Par exemple

$$(S; S) \in \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$$

et désigne intuitivement la fonction qui a x associe $x + 2$.

Pour définir de nouvelles fonctions sur les entiers, on a envie de pouvoir procéder de la façon suivante : Supposons que l'on ait à l'esprit une fonction h de $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}$ (A est un ensemble quelconque) donnée par les deux clauses suivantes :
$h(0) = a$ (pour $a \in A$)
$h(S(n)) = F(h(n))$ (pour une fonction donnée $F \in A \rightarrow A$).

Intuitivement, ces deux clauses permettent de calculer la valeur de h en tout point x. En effet : $h(n) = F(h(n-1)) = F(F(h(n-2))) = \ldots = F^n(a)$. Ce principe de définition de fonction (définition par récurrence) est admissible en théorie des ensembles.

Proposition 1 *Soit A un ensemble, $F \in A \rightarrow A$. Il existe une unique fonction $h \in \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que :*
$h(0) = a$ (pour $a \in A$) et
$\forall x(x \in \mathcal{N} \rightarrow \langle(\mathcal{S}(\S)) = \mathcal{F}(\langle(\S)))$

On peut généraliser le principe de définition par récurrence, pour les fonctions à n arguments. Voici le principe pour les fonctions à deux arguments :
Soit A un ensemble, $F_1 \in B \rightarrow A$, $F_2 \in A \times N \times B \rightarrow A$ $F_3 \in B \rightarrow B$. Il existe une unique fonction $h \in \mathcal{N} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que :
$h(0, y) = F_1(y)$ et
$\forall x, y(x \in \mathcal{N} \wedge \dagger \in \mathcal{B} \rightarrow \langle(\mathcal{S}(\S), \dagger) = \mathcal{F}_\in(\langle(\S, \mathcal{F}_\ni(\dagger)), \S, \dagger))$

4.5.3 Quelques fonctions sur les entiers

addition	$(+_0) : \forall y(N(y) \rightarrow 0 + y = y)$ $(+_1) : \forall x \forall y(N(x), N(y) \rightarrow s(x) + y = s(x + y))$
multiplication	$(*_0) : \forall y(N(y) \rightarrow 0 * y = 0)$ $(*_1) : \forall x \forall y(N(x), N(y) \rightarrow s(x) * y = (x * y) + y)$
exponentiel	$(exp_0) : \forall m(N(n) \rightarrow m^0 = 1$ $(exp_1) : \forall m \forall n(m^{S(n)} = m \times (m^n)$
soustraction	$\{(m, n, a) \| m, n, a \in \mathcal{N} \wedge \backslash \leq \Updownarrow \wedge \backslash + \dashv = \Updownarrow\}$
division	$\{(m, n, a) \| m, n, a \in \mathcal{N} \wedge \Updownarrow \neq \prime \wedge \Updownarrow \times \dashv \leq \backslash \wedge \Updownarrow < \Updownarrow \times \mathcal{S}(\dashv)\}$

4.6 Les suites

4.6.1 Définition des suites

Soit A un ensemble. Une suite d'éléments de A de longueur n est une fonction totale de l'intervalle $1..n$ vers A.
Définissons donc d'abord la notion d'intervalle de 1 à n :

$$1..n \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathcal{N} \wedge \infty \leq \S \leq \backslash\}$$

On peut maintenant construire l'ensemble des suites d'éléments de A, noté $seq(A)$ comme l'ensemble des fonctions totales des intervalles d'entiers vers A :

$$\{f | f \in \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A} \wedge \exists \backslash(\backslash \in \mathcal{N} \wedge \{ \in \infty..\backslash \rightarrow \mathcal{A})\}$$

$\emptyset \in seq(A)$ car c'est une fonction totale de $1..0$ vers A. $\emptyset$ désignera dans ce contexte la suite vide et le noterons [ ].
On peut aussi définir la fonction : qui étant donné un élément a de A et une suite $s \in seq(A)$, insère a en tête de s. Il suffit d'augmenter de 1 les indices de s puis d'ajouter le couple $1 \mapsto a$. Pour augmenter de 1 les indices de s, il suffit de composer la fonction prédécesseur ($pred$) avec s comme l'indique la figure suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & pred & & s & \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & a_1 \\ 3 & \mapsto & 2 & \mapsto & a_2 \\ & & \vdots & & \\ n+1 & \mapsto & n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Soit $a \in A$ et $s \in seq(A)$ On définit donc :

$$a : s \stackrel{\text{def}}{=} \{1 \mapsto a\} \cup (pred; s)$$

Proposition 2 $:\in A \times s \in seq(A) \rightarrow\ s \in seq(A)$

4.6.2 Principe de définition par récurrence sur les suites

Soit A un ensemble, $F \in B \times A \rightarrow\ B$,
Il existe une unique fonction $h \in seq(A) \rightarrow\ B$ telle que :
$h([\,]) = b$
$h(a : x) = F(h(x), a)$

Soit A un ensemble, $F_1 \in B \rightarrow\ C$,
$F_2 \in C \times seq(A) \times A \times B \rightarrow\ C$ et
$F_3 \in B \rightarrow\ B$.
Il existe une unique fonction $h \in seq(A) \times B \rightarrow\ C$ telle que :
$h([\,], y) = F_1(y)$ et
$\forall x, y(x \in seq(A) \wedge y \in A \rightarrow h(x : a, y) = F_2(h(x, F_3(y)), x, a, y))$

4.6.3 Quelques fonctions sur les suites

En plus de celles définies dans le chapitre précédent , on peut définir par exemple :

$reverse$	$(rev_0) : reverse([]) = []$ $(rev_1) : \forall a \forall x(N(a), N(x) \rightarrow$ $\quad reverse(a : x) = append(reverse(x), a : []))$
$t \uparrow n$	$t \uparrow n \stackrel{\text{def}}{=} (1..n) \lhd t$

4.6.4 le cardinal d'un ensemble fini

Comment exprimer le fait qu'un ensemble est fini ? Il suffit de pouvoir le mettre en bijection avec un sous ensemble strict de $\mathcal{N}$:

$$Fini(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists f \exists n(n \in \mathcal{N} \wedge \{ \in \infty..\backslash \twoheadrightarrow\ \S \wedge \{ \in \infty..\backslash \rightarrowtail \S)$$

Soit maintenant A un ensemble et x un sous ensemble de A.
L'ensemble $card(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, m)|x \subseteq A \wedge \exists n \exists f(n \in \mathcal{N} \wedge \{ \in \infty..\backslash \twoheadrightarrow\ \S \wedge \{ \in \infty..\backslash \rightarrowtail \S \wedge \Updownarrow = \Updownarrow \dashv \S(\lceil \wr \Updownarrow(\{\})))\}$ définit une fonction qui associe à chaque sous ensemble fini de A le nombre de ses éléments.
Pour montrer que c'est une fonction, il faut montrer que x a une unique image. Ceci est assuré par le fait que s'il existe n et une bijection de $1..n$ vers x alors ceux ci sont uniques. Le fait qu'elle soit totale sur les sous ensembles finis de A est déduit de la définition de $Fini$.

Exemple 2 *Soit s et t des suites d'éléments de A.*
Ecrire des formules exprimant les faits suivants :

1. *s est ordonnée*
2. *s est une permutation de t*
3. *s est sans répétition*

4.7 Exercices

Exercice 1 *On veut modéliser le fonctionnement d'une bibliothèque : On observe les règles suivantes :*

1. *Un exemplaire est toujours associé à un livre. Celui ci est unique.*
2. *Un même exemplaire de livre ne peut etre emprunté par différents abonnés.*
3. *Un même abonné ne peut emprunter plus d'un exemplaire d'un même livre*

Formaliser les règles en théorie des ensembles On se donne :
3 ensembles :
Ex (exemplaires),
L (livres)
A (abonnés)
et 2 relations :
Emp entre A et EX
Exde entre Ex et L

Corrigé :

1. $Exde \in Ex \rightarrow\ L$
2. $Emp \in Ex \nrightarrow A$
3. *Construisons la relation (e, (a,l)) reliant un exemplaire emprunté à son emprunteur et au livre qu'il référence. :*
$f \stackrel{\text{def}}{=} \{(e,(a,l))/e \in E \wedge a \in A \wedge l \in L \wedge (e,a) \in Emp \wedge (e,l) \in Exde\}$
. Cette relation est une fonction car un exemplaire ne peut etre relié à deux couples (aa,la) (ab,lb) différents du fait que Emp et Exde sont des fonctions de domaine Ex. Il suffit d'imposer que notre fonction soit de plus injective : 2 exemplaires differents ne peuvent etre relies a un même couple (a,l) ie ne peuvent etre des exemplaires du même livre emprunté par le même abonné :
$f \in Ex \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\nrightarrow (A \times L)$

Exercice 2 *Pour formaliser des relations de parenté, on se donne les entités suivantes :*

- *3 ensembles : Humain, Homme, Femme.*
- *2 relations : epoux_de reliant reliant des femmes à leurs époux :*
  $epoux\_de \in Femme \rightleftharpoons Homme$
  et mere_de reliant des humains à leur mère :
  $mere\_de \in Humain \rightleftharpoons Femme$

1. *Formaliser les contraintes suivantes :*

   (a) *Personne ne peut être en même temps une femme et un homme*
   (b) *Cependant on est femme ou on est homme.*
   (c) *Les femmes n'ont qu'un seul époux.*
   (d) *Les mères sont des femmes mariées.*
2. *Définir les objets suivants en utilisant les entités précédentes :*
   (a) *epouse_de : l'épouse d'un homme est une femme dont cet homme est l'époux.*
   (b) *pere_de : Le père de quelqu'un est l'epoux de la mère.*
   (c) *conjoint_de : Le conjoint d'une femme est son époux, celui d'un homme est son épouse.*
   (d) *femmes_celibataires : une femme célibataire est une femme non mariée.*

Corrigé

1. (a) *Personne ne peut être en même temps une femme et un homme :*
   $\forall x(x \in Humain \rightarrow (x \in Homme \leftrightarrow x \notin Femme))$.
   ou : $Homme \cap Femme = \emptyset$.
   (b) *Cependant on est femme ou on est homme :*
   $\forall x(x \in Humain \rightarrow (x \in Homme \vee x \in Femme))$.
   ou : $Homme \cup Femme = Humain$.
   (c) *Les femmes n'ont qu'un seul époux :*
   $epoux\_de \in Femme \nrightarrow Homme$
   (d) *Les mères sont des femmes mariées :*
   $ran(mere\_de) \subseteq dom(epoux\_de)$
2. *Définir les objets suivants en utilisant les entités précédentes :*
   (a) *epouse_de : l'épouse d'un homme est une femme dont cet homme est l'époux :*
   $epouse\_de \stackrel{\text{def}}{=} epoux\_de^{-1}$
   (b) *pere_de : Le père de quelqu'un est l'epoux de la mère :*
   $pere\_de \stackrel{\text{def}}{=} mere\_de; epoux\_de$
   (c) *conjoint_de : Le conjoint d'une femme est son époux, celui d'un homme est son épouse :*
   $conjoint\_de \stackrel{\text{def}}{=} epoux\_de \cup epouse\_de$
   (d) *femmes_celibataires : une femme célibataire est une femme non mariée :*
   $femme\_celibataire \stackrel{\text{def}}{=} femme - dom(epoux\_de)$

Exercice 3 *Elaborer un modèle mathématique permettant de formaliser le fonctionnement d'un hopital décrit par les contraintes suivantes :*

1. *Un hopital est constitué d'un certain nombre de chambre numérotées de 1 à n.*
2. *Dans chaque chambre on trouve 1 ou plusieurs lits.*
3. *Les chambres ne disposent pas toutes du même nombre de lits.*
4. *Une chambre peut etre dans l'un des états suivants : Vide, Pleine ou partiellement occuppée.*
5. *Les malades sont répertoriés selon leur catégorie : enfant, adulte homme, adulte femme.*
6. *Une chambre ne comporte que des malades d'une même catégorie*

Corrigé :
Les contraintes 2 et 3 expriment le fait que les chambres ont une capacité fixe pour chacune d'elles mais variable de l'une à l'autre.
De la description sommaire qui nous est fournie, il ressort qu'une chambre est déterminée par son numéro, sa capacité, son état, et qu'un malade est déterminé par sa catégorie et la chambre qu'il occuppe.
Il apparait que l'état d'une chambre est une notion qui peut se définir à partir des autres notions. Les entités de base que nous choisissons sont donc :

- *3 ensembles : Chambre , Malade, Categorie* $= \{H, F, E\}$.
- *4 relations :*
  $numero \in Chambre \rightleftharpoons 1..n$
  $capacite \in Chambre \rightleftharpoons \mathcal{N}$
  $chambre\_de \in Malade \rightleftharpoons Chambre$
  $categ \in Malade \rightleftharpoons Categorie$

Les contraintes s'expriment alors de la façon suivante :

1. *Un hopital est constitué d'un certain nombre de chambre numérotées de 1 à n :*
   numero est une bijection de Chambre vers $1..n$
2. *Dans chaque chambre on trouve 1 ou plusieurs lits et les chambres ne disposent pas toutes du même nombre de lits :*
   $capacite \in Chambre \rightarrow \mathcal{N}$
3. *Les malades sont répertoriés selon leur catégorie : enfant, adulte homme, adulte femme :*
   $categ \in Malade \rightarrow Categorie$
4. *contrainte implicite : les malades n'occuppent qu'une seule chambre :*
   $chambre\_de \in Malade \rightarrow Chambre$

5. *Une chambre peut être dans l'un des états suivants : Vide, Pleine ou partiellement occupée.*
   On définit les 4 ensembles suivants :
   $occupant\_de \stackrel{\text{def}}{=} chambre\_de^{-1}$
   $chambre\_vide \stackrel{\text{def}}{=} \{c/c \in Chambre \wedge card(occupant\_de[\{c\}]) = 0\}$
   $chambre\_pleine \stackrel{\text{def}}{=} \{c/c \in Chambre \wedge card(occupant\_de[\{c\}]) = capacite(c)\}$
   $chambre\_part\_occuppee \stackrel{\text{def}}{=} \{c/c \in Chambre \wedge 0 < card(occupant\_de[\{c\}]) < capacite(c)\}$
   La contrainte devient :
   $Chambre = chambre\_vide \cup chambre\_pleine \cup chambre\_part\_occuppee$
6. *Une chambre ne comporte que des malades d'une même catégorie :*
   $occupant\_de; categ \in Chambre \nrightarrow categorie$

Exercice 4 *Il s'agit de construire un modèle partiel du fonctionnement d'une banque. Considérons les règles informelles suivantes. :*

– *Une banque gère pour ses clients deux types de comptes : les comptes* courant *et les comptes* épargne.
– *Chaque compte appartient à un unique client.*
– *Un client peut posséder plusieurs comptes courants mais un seul compte épargne.*

Formaliser les règles précédentes en Théorie des Ensembles

Il s'agit donc de se donner des symboles représentant des ensembles et d'énoncer les règles au moyen de ceux ci.

– $Compte = Courant \cup Epargne.$
  $Courant \cap Epargne = \emptyset$
– $possede \in Compte \nrightarrow Client$
– $Epargne \lhd possede \in Compte \rightarrowtail Client$

Exercice 5 *Construire un modèle mathématique permettant de rendre compte des contraintes suivantes sur le fonctionnement d'une caisse de retraite.*

– *Il existe deux types de pensions : les pensions de droit propre et les pensions de droit dérivé.*
– *Tout assuré possède une et une seule pension de droit propre.*
– *Pour posséder une pension de droit dérivé, il faut que le conjoint de l'assuré possède une pension de droit propre et soit décédé.*
– *Um même assuré peut posséder plusieurs pensions de droit dérivé.*

Exercice 6 *Soit* $t \in 1..n \rightarrow A$. *Définir les ensembles suivants :*

1. *L'ensemble des indices des éléments de t qui sont supérieurs à leurs voisins de gauche.*

2. *L'ensemble des éléments de t qui apparaissent plus d'une fois dans t.*
3. *L'ensemble des éléments de t qui sont supérieurs à un objet $a \in A$ donné.*

Corrigé :

1. $\{i/i \in 2..n \wedge t(i-1) < t(i)\}$
2. $\{a/a \in A \wedge \exists i,j(i \neq j \wedge i \in 1..n \wedge j \in 1..n \wedge t(i) = a \wedge t(j) = a\}$
3. $\{b/b \in A \wedge \exists i(i \in 1..n \wedge t(i) > a)\}$

Exercice 7 *Soit $t \in 1..n \rightarrow A$, $t' \in seq(A)$ et P un prédicat unaire.*
Exprimer les propriétés suivantes :

1. *Tous les éléments de t vérifient P.*
2. *au moins un élément de t vérifient P.*
3. *x est un élément de t vérifiant P.*
4. *t' est une suite formée des éléments de t vérifiant P.*
5. *t est ordonnée.*
6. *t' est une permutation de t*
7. *t' est un tri de t.*

Corrigé :

1. $P_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \forall i(i \in 1..n \rightarrow P(t(i)))$
2. $P_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exists i(i \in 1..n \wedge P(t(i)))$
3. $P_3(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists i(i \in 1..n \wedge t(i) = x \wedge P(x))$
4. $P_4(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} ran(t') \subseteq ran(t) \wedge \forall x(x \in ran(t') \rightarrow P(x))$ *ou :*
   $P_4(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} ran(t') = ran(t) \rhd \{x/x \in A \wedge P(x)\}$
5. $trie(t) \stackrel{\text{def}}{=} \forall i, \forall j(i \in dom(t) \wedge j \in dom(t) \wedge i < j \rightarrow t(i) \leq t(j))$
6. $Permut(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} \exists s(s \in 1..n \rightarrowtail 1..n \wedge s \in 1..n \twoheadrightarrow 1..n \wedge t' = s;t)$
7. $tri(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} permut(t,t') \wedge trie(t')$