

RCP104 – Optimisation en Informatique

Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

CNAM 2012/2013
Sourour Elloumi et Eric Soutif

RCP104 – Optimisation en Informatique – Plan du cours

2

- Cours 1 : Introduction
- Cours 2 : Modélisation
- Cours 3 : Rappels de Programmation Linéaire (PL)
- **Cours 4 : Méthodes arborescentes et PLNE**
- Cours 5 : Métaheuristiques
- Cours 6 : Prétraitements

Définition PLNE

3

- **Programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)** : Programmation linéaire où certaines variables ne peuvent prendre que des valeurs entières
 - **Programmation pure** (resp. **mixte**) en NE : la totalité (resp. un sous-ensemble) des variables sont entières
 - **Programmation 0-1** ou binaire : les variables entières ne peuvent être que 0 ou 1

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Exemple 1

4

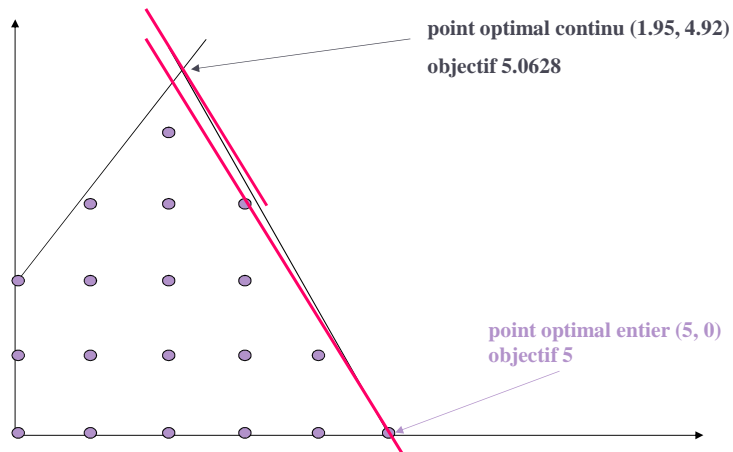
$$\left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 0.64x_2 \\ \text{s.c. :} \\ 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{array} \right.$$

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Exemple 1 - Suite

5



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Définition PLNE

6

- PL et PLNE sont TRÉS différentes
- Optimisation continue convexe / Optimisation discrète

Suite de ce cours :

- Utilité de la PLNE
- Résolution des PLNE

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Application 1 : choix d'usines et d'entrepôts

7

- But : choisir de nouveaux emplacements pour construire des usines et des entrepôts
- Deux emplacements : Lyon et Toulouse
- On ne peut construire plus d'un entrepôt
- On ne peut construire un entrepôt que dans une ville où l'on a aussi une usine
- On connaît, pour chaque ville :
 - Coefficient de rentabilité usine ou entrepôt
 - Coût de construction usine ou entrepôt
- Le coût total de construction ne peut pas dépasser 10
- Objectif : maximiser la rentabilité

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Application 1 : données

8

	Rentabilité	Coût
Usine à L	9	6
Usine à T	5	3
Entrepôt à L	6	5
Entrepôt à T	4	2

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Application 1 : modèle

9

□ Variables de décision :

- $x_1 = 1$ si une **usine** est construite à **Lyon** et 0 sinon
- $x_2 = 1$ si une **usine** est construite à **Toulouse** et 0 sinon
- $y_1 = 1$ si un **entrepôt** est construit à **Lyon** et 0 sinon
- $y_2 = 1$ si un **entrepôt** est construit à **Toulouse** et 0 sinon

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Application 1 : modèle

10

□ Contraintes

1- On ne peut construire plus d'un entrepôt

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

2- On ne peut construire un entrepôt que dans une ville où l'on a aussi une usine

$$y_1 \leq x_1$$

$$y_2 \leq x_2$$

3- Le coût total de construction ne peut pas dépasser 10

$$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

□ Objectif

$$\max 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Application 1 : résumé du modèle et mise en version minimisation

11

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = -9x_1 - 5x_2 - 6y_1 - 4y_2 \\ \text{s.c. :} \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 \leq x_1 \\ y_2 \leq x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ 0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq 1 \text{ et entiers} \end{array} \right.$$

C'est notre
exemple de
base

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Exemple de base: résolution par un solveur/modeleur (glpk-gmpl)

12

```
#Exemple du cours

#variables
var x1 binary;
var x2 binary;
var y1 binary;
var y2 binary;

#fonction objectif
minimize Z : -9*x1 - 5*x2 - 6*y1 - 4*y2 ;

#contraintes
subject to
c1: y1 + y2 <= 1;
c2: y1 <= x1;
c3: y2 <= x2;
c4: 6*x1 + 3*x2 + 5*y1 + 2*y2 <= 10;

printf "-----Début de la résolution -----\n";
solve;

printf "-----Fin de la résolution -----\n";
display Z;
display x1;
display x2;
display y1;
display y2;

end;
```

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Exemple de base: résolution par un solveur/modeleur (OPL-Cplex)

13

Valeur optimale : $Z^* = -14$

valeur de x_1 : 1

valeur de x_2 : 1

valeur de y_1 : 0

valeur de y_2 : 0

Langage de modélisation : OPL (Optimization Programming Language)

Solveur : Cplex (IBM-Ilog)

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Résolution des PLNE

14

- Nous allons voir comment résoudre les PLNE
 1. Dans le cas particulier des problèmes purement binaires PL01
 2. Dans le cas général des PLNE

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Résolution des PL01 - Exemple de base

15

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = -9x_1 - 5x_2 - 6y_1 - 4y_2 \\ \text{s.c. :} \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 \leq x_1 \\ y_2 \leq x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ 0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq 1 \quad \text{et entiers} \end{array} \right.$$

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Résolution des PL01

16

1ère idée : énumération

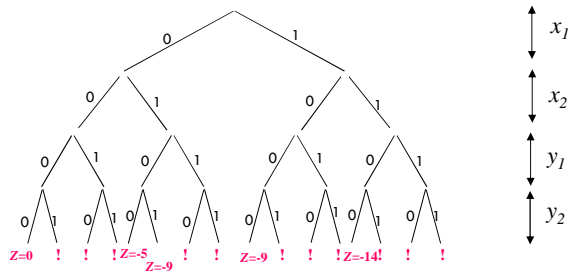
RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Résolution des PL01 - Énumération

17

- Idée : il existe un nombre fini de solutions. Enumérons-les !



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Résolution des PL01 - Enumération

18

- Pour n variables binaires, 2^n cas possibles
- Pour $n=20$, plus d'un million
- Pour $n=30$, plus d'un milliard ...
- Idée d'énumération de tous les cas possibles **impraticable** en Optimisation Discrète en général

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Résolution des PL01

19

2ème idée : encadrement de la valeur optimale

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Relaxation continue - exemple de base

20

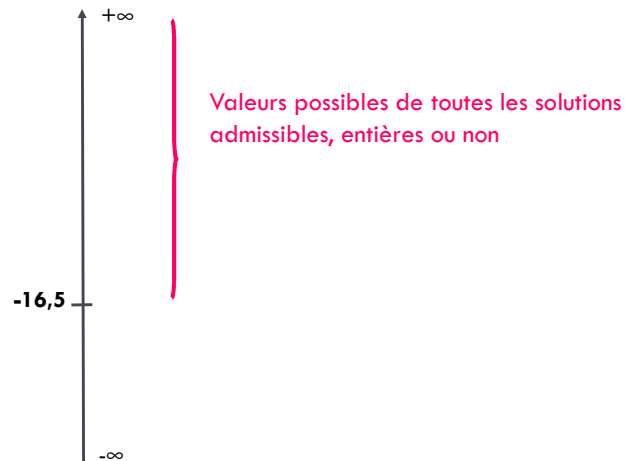
- **Relaxation continue** = on « oublie » le caractère entier des variables
- On obtient un programme linéaire (continu) qu'on sait résoudre, par exemple par la méthode du simplexe :
 - ▣ Solution $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (5/6, 1, 0, 1)$
 - ▣ Valeur optimale : $Z = -33/2 = -16.5$

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Relaxation continue: interprétation

21



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Relaxation continue: interprétation

22

Conclusion : la valeur optimale (en entier) ≥ -16.5

Propriété générale

- Pour un problème de maximisation :
la valeur optimale en entier \leq la valeur optimale en continu
- Pour un problème de minimisation :
la valeur optimale en entier \geq la valeur optimale en continu

On dit que la valeur optimale de la relaxation continue est

- une **borne supérieure** (si objectif de maximisation) ou
- une **borne inférieure** (si objectif de minimisation)

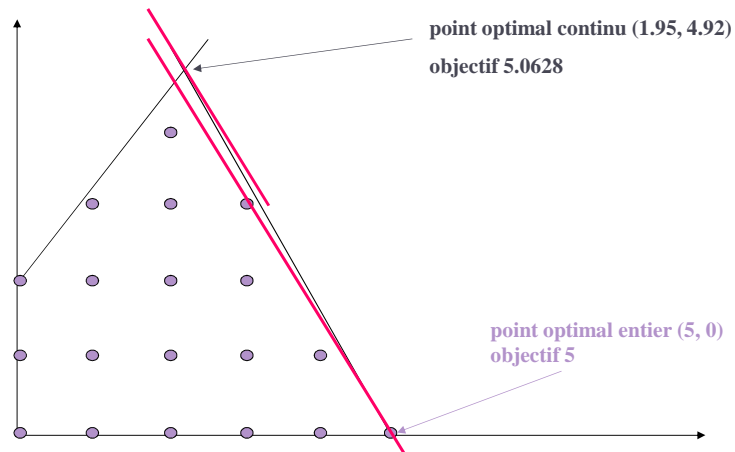
de la valeur optimale en entier

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Exemple 1 - Rappel (max)

23



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Connaissance d'une solution admissible

24

- **Question** : quelle information a-t-on si l'on dispose d'une solution admissible ?

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Connaissance d'une solution admissible- exemple de base

25

- Admettons que l'on connaisse la solution

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 0, 0)$$

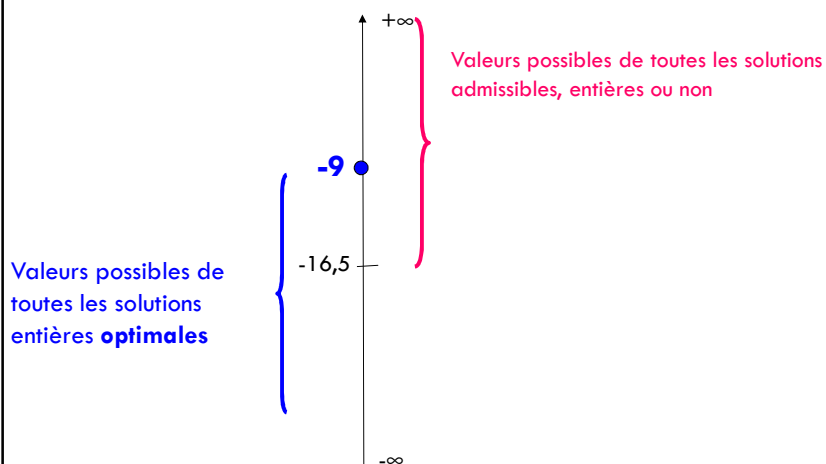
de valeur $Z = -9$

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Connaissance d'une solution admissible- exemple de base

26



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Connaissance d'une solution admissible- exemple de base

27

Conclusion : la valeur d'une solution optimale est comprise entre
-16.5 et **-9**

Propriété générale :

- Pour un problème de minimisation,
val. optimale en continu \leq **val. optimale en entier** \leq val. d'une solution admissible

borne inférieure

borne supérieure

- Pour un problème de maximisation,
val. d'une solution admissible \leq **val. optimale en entier** \leq val. optimale en continu

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Algorithme Branch-and-Bound (Séparation et évaluation) pour résoudre un PLNE

28

- Ingrédients de base :
 - encadrement de la valeur optimale (borne inférieure, borne supérieure)
 - énumération limitée dans le but d'obtenir un encadrement de plus en plus fin

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

29

- Dans la solution de la relaxation continue : $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (5/6, 1, 0, 1)$, x_1 n'est pas entier. On va « brancher » selon les deux valeurs possibles de x_1 : 0 et 1

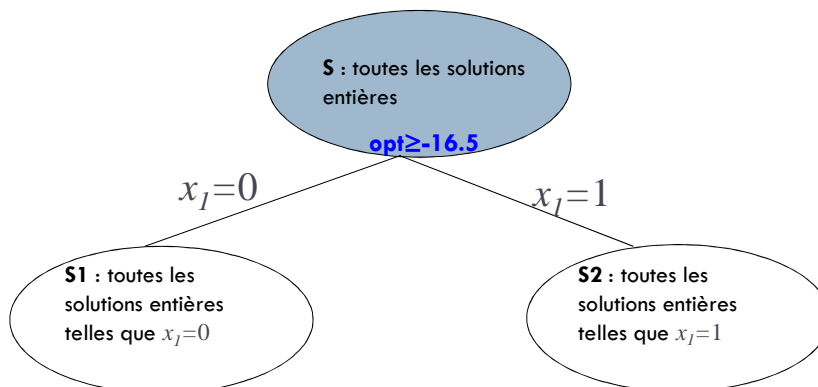
RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

30

Solution courante : -9



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

31

Sous-ensemble **S1** : $x_1=0$

$$\min Z = -5x_2 - 6y_1 - 4y_2$$

s.c. :

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_2, y_1, y_2 \leq 1 \text{ et entiers}$$

Solution de la relaxation continue : $(x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 1)$ et $Z = -9$,

et c'est une solution entière !

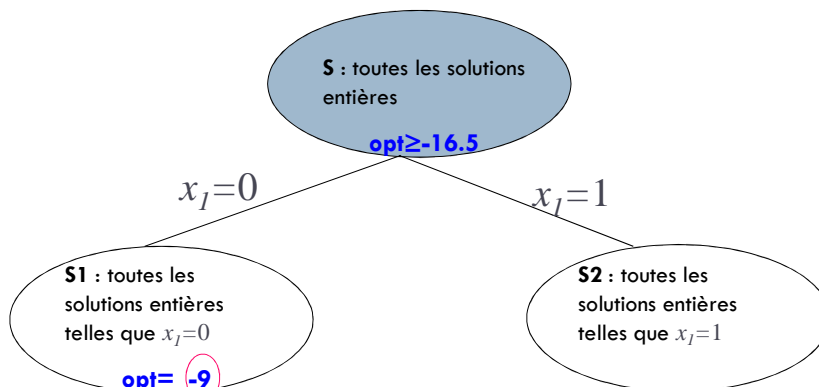
RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

32

Solution courante : -9



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

33

Sous-ensemble **S2** : $x_1=1$

$$\min Z = -9 - 5x_2 - 6y_1 - 4y_2$$

s.c. :

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_2, y_1, y_2 \leq 1 \text{ et entiers}$$

Solution de la relaxation continue : $(x_2, y_1, y_2) = (4/5, 0, 4/5)$ et $Z = -16.2$

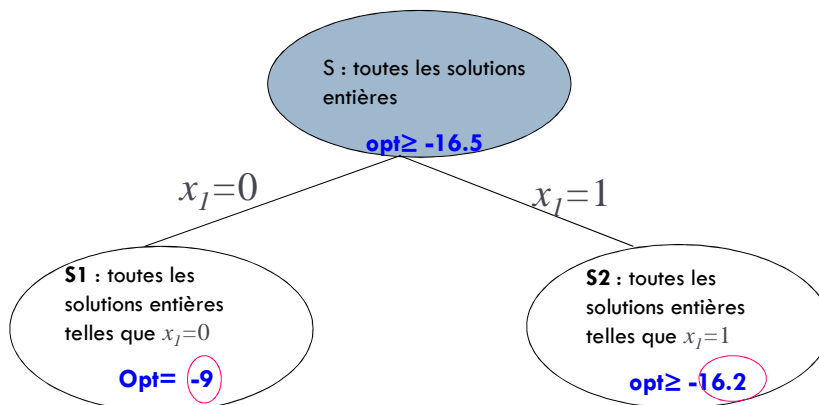
RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

34

Solution courante : -9



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

35

- Conclusion actuelle :
 - ▣ Meilleure solution admissible connue (**solution courante**) de valeur -9
 - ▣ Meilleure borne inférieure connue : -16.2
 - ▣ La valeur optimale est donc comprise entre -9 et -16.2

- Comment continuer ?

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

36

Le noeud **S1** peut être **élagué** car on connaît la valeur d'une solution entière optimale dans cet ensemble (valeur solution courante \geq relaxation continue)

S1 : toutes les solutions entières telles que $x_j=0$

Opt= -9

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

37

Pour le noeud **S2**, on applique le même traitement que pour **S**

S2 : toutes les solutions entières telles que $x_1=1$

$opt \geq -16.2$

Solution de la relaxation continue : $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 4/5, 0, 4/5)$ et $Z = -16.2$. On va brancher sur x_2

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

38

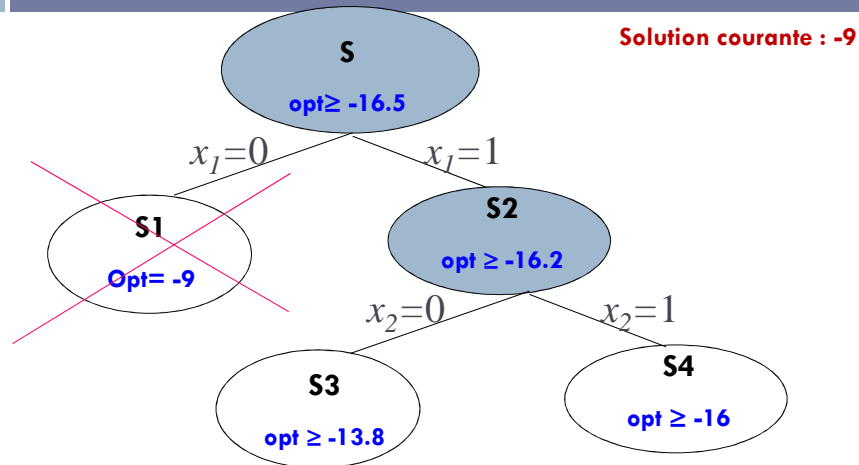
- Sous-ensemble **S3** : $x_1=1$ et $x_2=0$ Solution de la relaxation continue : $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 4/5, 0)$ et $Z = -13.8$
- Sous-ensemble **S4** : $x_1=1$ et $x_2=1$ Solution de la relaxation continue : $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0.5)$ et $Z = -16$

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

39



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

40

- Conclusion actuelle :
 - ▣ Valeur meilleure solution connue : -9
 - ▣ Meilleure borne inférieure connue : -16

- On ne peut élaguer ni **S3** ni **S4**

- On « repart » avec **S4** qui a la plus petite borne inférieure. On branche sur y_1

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

41

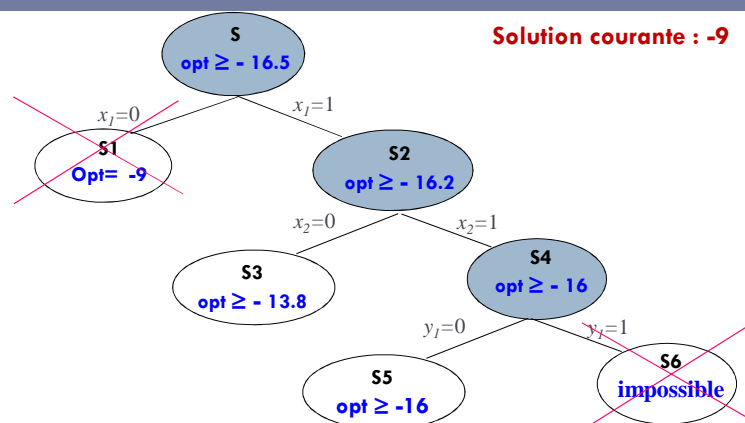
- Sous-ensemble **S5** : $x_1=1, x_2=1$ et $y_1=0$ Solution de la relaxation continue : $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0.5)$ et $Z = -16$
- Sous-ensemble **S6** : $x_1=1, x_2=1$ et $y_1=1$ impossible. **S6** peut donc être élagué

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

42



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

43

- Conclusion actuelle :
 - ▣ Valeur meilleure solution connue : -9
 - ▣ Meilleure borne inférieure connue : -16

- On peut repartir soit avec **S3** soit avec **S5**, on repart avec **S5**, on branche sur y_2

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

44

- Sous-ensemble **S7** : $x_1=1, x_2=1, y_1=0$ et $y_2=0$
Solution unique entière et $Z=-14$ (<-9 donc **Nouvelle solution courante**)

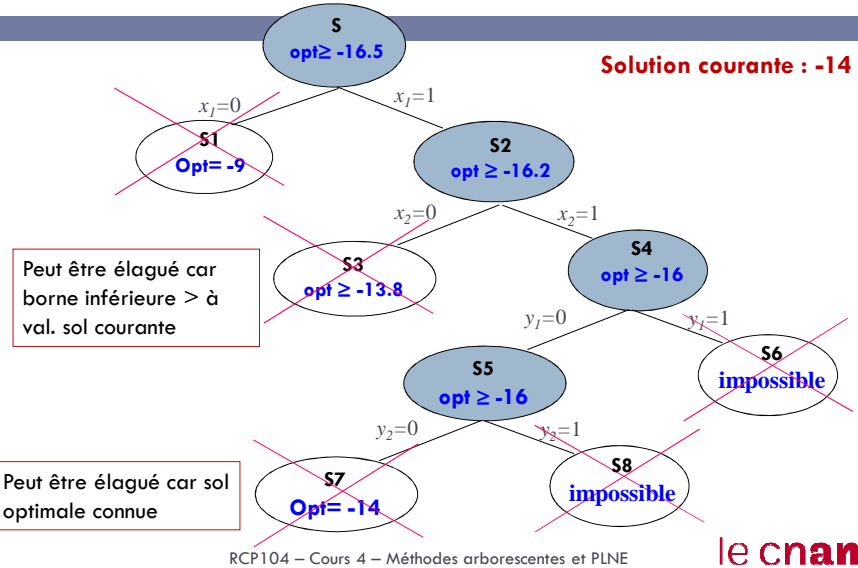
- Sous-ensemble **S8** : $x_1=1, x_2=1, y_1=0$ et $y_2=1$
impossible. S8 peut donc être élagué

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

B&B- Exemple de base

45



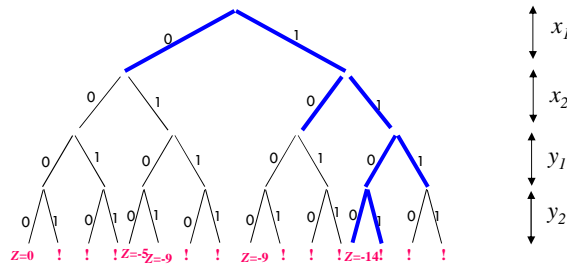
B&B- Exemple de base

46

- Conclusion : on peut s'arrêter car tous les nœuds ont été élagués. On prouve ainsi que la solution de valeur -14 est optimale !

B&B- Exemple de base, gain par rapport à l'énumération complète

47



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Algorithme B&B (min)- Résumé

48

- Initialisation
 - Calculer une solution admissible de valeur Z^* ou poser $Z^* = +\infty$
 - Résoudre la relaxation continue et mettre à jour éventuellement Z^* (évaluation)
 - Appliquer les tests d'élagage
- Tant qu'il reste des nœuds non élagués
 - Choisir un nœud non élagué
 - Brancher sur une des variables (séparation)
 - Pour chacun des 2 nouveaux nœuds, résoudre la relaxation continue et mettre à jour éventuellement Z^*
 - Appliquer les tests d'élagage
- Fin tant que
- La solution courante Z^* est optimale

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Algorithme B&B (min)- Résumé- suite

49

- Un nœud est élagué si:
 - ▣ La relaxation continue n'a pas de solution
 - ▣ La valeur optimale de la relaxation continue $\geq Z^*$
 - ▣ Solution entière de la relaxation continue
 - ▣ Pas de solution admissible entière

- La mise en place de l'algorithme nécessite de préciser :
 - ▣ La règle de sélection : quel nœud non élagué choisir ?
 - ▣ La règle de branchement : sur quelle variable brancher ?

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

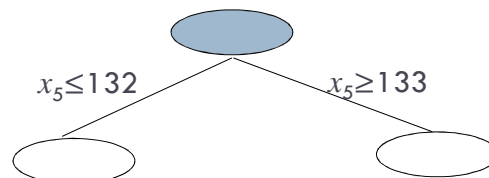
le cnam

Algorithme B&B (min)- Résumé- suite

50

- Dans le cas général des variables entières (non seulement 0-1), on choisit une variable de valeur fractionnaire dans la solution optimale de la relaxation continue et on branche sur l'arrondi supérieur et inférieur de cette valeur

Exemple : $x_5 = 132.48$



RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Détermination des solutions admissibles

51

- Ce n'est pas toujours facile (pb général NP-complet)
- Il n'existe pas de méthode générale rapide
- On peut se contenter de celles qu'on trouve lors de la résolution des relaxations continues
- Il existe des algorithmes qui fonctionnent bien dans des cas particuliers, par exemple l'arrondi

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Problème d'efficacité

52

- C'est le nombre de nœuds explorés qui déterminera le temps de calcul. À chaque nœud, on résout un programme linéaire (continu)
- On ne peut pas prévoir à l'avance le nombre maximal de nœuds qu'il faudra explorer
- En règle générale, un programme linéaire continu se résout « vite »
- Un PLNE nécessite du temps ...

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Efficacité- Exemple

53

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.c. :

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \leq b_2$$

x_j variables binaires

- Problème avec $n=1000$ variables données engendrées aléatoirement
- Relaxation continue : 0.03 secondes
- Résolution en entier : 43 secondes (251402 nœuds)

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Quelques implémentations classiques des B&B

54

□ Méthode de Balas pour les PL01 :

- Ré-écrire z (à minimiser) de sorte que z n'ait pas de coefficients négatifs et les variables soient triées en ordre croissant de ces coefficients (tout programme peut être exprimé de cette façon)
- Séparation : fixer une variable soit à 0 soit à 1
- Si un sous-problème a un second-membre positif ou nul, on a déjà une solution réalisable (en fixant toutes les variables restant à 0) et c'est la solution optimale de ce (sous-)problème
- Parcourir l'arbre en profondeur
- Plusieurs règles d'élagage permettent de savoir qu'un problème donné est infaisable ou ne peut donner une solution meilleure d'une solution déjà trouvée.

RCP104 – Cours 4 – Méthodes arborescentes et PLNE

le cnam

Quelques implémentations classiques des B&B

55

- **Méthode de Dakin pour les PLNE :**
 - ▣ Parcourir l'arbre en profondeur (ce qui a une bonne chance de produire une solution réalisable assez vite)
 - ▣ Choisir à chaque itération le problème possédant la meilleure solution de son programme relaxé
 - ▣ Séparer sur une nouvelle variable dont la valeur (dans la solution optimale du programme relaxé) est la plus proche d'un entier k . Cette variable a une fourchette de valeurs possibles, disons $[\min, \max]$. On construit deux nouveaux problèmes, un avec $[\min, k]$, et l'autre avec $[k+1, \max]$