Optimisation en Informatique
RCP104

Cours 3 – Principes de base de la Programmation Linéaire (PL)

Eric Soutif

Plan du chapitre 4 – Principes de base de la PL

1. Introduction à la programmation linéaire
2. Modélisation de problèmes
3. Première utilisation d'un solveur
4. Résolution graphique : un pb à deux variables
5. Méthode des tableaux du simplexe
6. Dualité en programmation linéaire

1. Introduction à la Programmation Linéaire

- Un problème central en *Recherche Opérationnelle*
- Problème classique de planification : affecter des ressources limitées à plusieurs activités concurrentes
- Programme = Plan (solution de ce problème)
- Programmation RO ≠ Programmation informatique
- Fonction linéaire : fonction dans laquelle chaque variable évolue linéairement

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

- Programme linéaire = Programme mathématique où toutes les fonctions sont linéaires

Exemple d'un modèle de PL

- Données du problème (*Entreprise Clotûres Martin*)
  - Deux types de produits (produit 1, produit 2)
  - Trois usines (usine 1, usine 2, usine 3)
  - Capacité limitée de production de chaque usine (par semaine)
  - Profit par lot (20 unités de chaque produit)

	Tps de production (h / lot)		Capacité de production (h)
	Produit 1	Produit 2	
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit (€) / lot	3000	5000	

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Chaque lot du produit 1 (2) est le résultat combiné de la production aux usines 1 et 3 (2 et 3)
- Énoncé du problème : déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre lots par semaine) de façon à maximiser le profit total
- Variables de décision :
  - x_1 : nombre de lots du produit 1
  - x_2 : nombre de lots du produit 2
- Fonction objectif :
  - Z = profit total
  - $Z = 3\,x_1 + 5\,x_2$ (profit total en milliers d'euros)
  - Maximiser Z

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Contraintes de capacité de production
  - $x_1 \leq 4$ (usine 1)
  - $2\,x_2 \leq 12$ (usine 2)
  - $3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 18$ (usine 3)
- Contraintes de non-négativité :
  - $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (nombre d'unités produites ≥ 0)

Exemple d'un modèle de PL (fin)

$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sous les contraintes} \left| \begin{array}{l} x_1 \le 4 \\ 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Terminologie de base en PL

- Solution réalisable (admissible) : solution pour laquelle toutes les contraintes sont satisfaites (appartient au domaine réalisable)
- Solution non réalisable : solution pour laquelle au moins une contrainte n'est pas satisfaite (n'appartient pas au domaine réalisable)
- Solution optimale : solution ayant la meilleure valeur possible de l'objectif
- Modèle n'ayant aucune solution optimale :
  - Domaine réalisable vide
  - Objectif non borné
- Modèle ayant une infinité de solutions optimales

Terminologie de base en PL (suite)

Pas de solution

$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. c.} \left| \begin{array}{l} x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Objectif non borné

$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. c.} \left| \begin{array}{l} x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Une infinité de solutions optimales

$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = x_1 + x_2 \\ \text{s. c.} \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

2. Modélisation de problèmes – Exemple 1 : horaire de personnel

- Chaque jour est divisé en *périodes*
- On a pu estimer un nombre minimum d'employés (MinEmp) devant être affectés durant chaque période
- Chaque jour est divisé en *quarts de travail* de 8 heures
- Plusieurs quarts partagent une même période
- Chaque quart de travail exige un salaire particulier
- Combien d'employés doit-on affecter à chaque quart de travail de façon à minimiser le total des salaires versés, en respectant le nombre minimum d'employés pour chaque période ?

Exemple 1 : données du problème

Période	Quart 1	Quart 2	Quart 3	Quart 4	Quart 5	MinEmp
6-8	x					48
8-10	x	x				79
10-12	x	x				65
12-14	x	x	x			87
14-16		x	x			64
16-18			x	x		73
18-20			x	x		82
20-22				x		43
22-24				x	x	52
0-6					x	15
Salaire	170	160	175	180	195	

Exemple 1 : modèle

- x_j : nombre d'employés affectés au quart j
- Objectif :

  Minimiser $Z = 170\ x_1 + 160\ x_2 + 175\ x_3 + 180\ x_4 + 195\ x_5$
- Pour chaque période, le nombre d'employés affectés aux différents quarts doit couvrir le minimum d'employés requis pour cette période
- Exemple, période de 14h à 16h :

  $x_2 + x_3 \ge 64$

Exemple 1 : modèle détaillé

$$
\begin{cases}
\text{Minimiser } Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5 \\
\text{sous les contraintes} \left| \begin{array}{l}
x_1 \geq 48 \\
x_1 + x_2 \geq 79 \\
x_1 + x_2 \geq 65 \\
x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 \\
x_2 + x_3 \geq 64 \\
x_3 + x_4 \geq 73 \\
x_3 + x_4 \geq 43 \\
x_4 \geq 82 \\
x_4 + x_5 \geq 52 \\
x_5 \geq 15 \\
x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5
\end{array} \right.
\end{cases}
$$

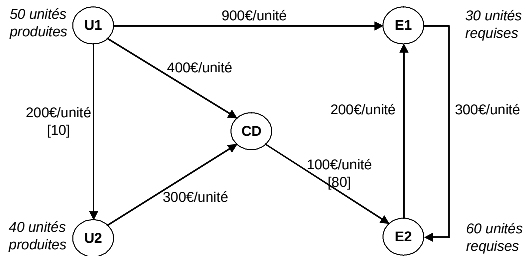
Exemple 1 : conclusions

- $x_1 + x_2 \geq 79 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \geq 65$
  Cette dernière contrainte est donc *redondante* et peut être enlevée
- $x_3 + x_4 \geq 82 \quad \Rightarrow \quad x_3 + x_4 \geq 73$
  Même observation avec cette contrainte
- $x_1 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ sont aussi redondantes mais il n'y a aucun intérêt à les éliminer : prise en compte implicite dans le processus de résolution
- Solution optimale (obtenue par le solveur d'Excel) :
  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (48,31,39,43,15)$
- Problème : le nombre d'employés doit toujours être entier, donc l'hypothèse de divisibilité n'est pas satisfaite dans le modèle (bien que la solution optimale dans ce cas particulier soit entière)

Exemple 2 : un réseau de distribution

- Deux usines (U1, U2)
- Un centre de distribution (CD)
- Deux entrepôts (E1, E2)
- Chaque usine confectionne un certain nombre d'unités d'un même produit (*offre*)
- Chaque entrepôt requiert un certain nombre d'unités de ce même produit (*demande*)
- Sur chaque lien (*arc*) du réseau, il y a un coût de transport par unité de produit (*coût unitaire*)
- Sur certains arcs, il y a une *capacité* sur le nombre d'unités transportées
- *Objectif* : minimiser le coût de transport total

Exemple 2 : données du problème



Exemple 2 : modèle

- $x_{i,j}$ = nombre d'unités du produit transportées sur l'arc (i, j) (entre les sommets i et j)
- Objectif (en centaines d'€) : Minimiser Z
  $$Z = 2x_{\mathrm{U1,U2}} + 4x_{\mathrm{U1,CD}} + 9x_{\mathrm{U1,E1}} + 3x_{\mathrm{U2,CD}} + x_{\mathrm{CD,E2}} + 3x_{\mathrm{E1,E2}} + 2x_{\mathrm{E2,E1}}$$
- Conservation du flot : en chaque sommet du réseau,
  - flot sortant = flot entrant
  - Nbre d'unités produites (usines) = Nbre d'unités requises (entrepôt)
- Capacité (sur certains arcs)
  - Exemple, pour larc (U1,U2) : $x_{\mathrm{U1,U2}} \leq 10$
- Contraintes de non-négativité

Exemple 2 : modèle détaillé

$$
\begin{cases}
\text{Minimiser } Z = 2x_{\mathrm{U1,U2}} + 4x_{\mathrm{U1,CD}} + 9x_{\mathrm{U1,E1}} + 3x_{\mathrm{U2,CD}} + x_{\mathrm{CD,E2}} + 3x_{\mathrm{E1,E2}} + 2x_{\mathrm{E2,E1}} \\
\text{s. c.} \left| \begin{array}{l}
x_{\mathrm{U1,U2}} + x_{\mathrm{U1,CD}} + x_{\mathrm{U1,E1}} = 50 \\
-x_{\mathrm{U1,U2}} + x_{\mathrm{U2,CD}} = 40 \\
-x_{\mathrm{U1,CD}} - x_{\mathrm{U2,CD}} + x_{\mathrm{CD,E2}} = 0 \\
-x_{\mathrm{U1,E1}} + x_{\mathrm{E1,E2}} - x_{\mathrm{E2,E1}} = -30 \\
-x_{\mathrm{CD,E2}} - x_{\mathrm{E1,E2}} + x_{\mathrm{E2,E1}} = -60 \\
x_{\mathrm{U1,U2}} \geq 0,\ x_{\mathrm{U1,CD}} \geq 0,\ x_{\mathrm{U1,E1}} \geq 0,\ x_{\mathrm{U2,CD}} \geq 0,\ x_{\mathrm{CD,E2}} \geq 0,\ x_{\mathrm{E1,E2}} \geq 0,\ x_{\mathrm{E2,E1}} \geq 0
\end{array} \right.
\end{cases}
$$

Exemple 2 : conclusions

- C'est un problème de flot à coût minimum (ou problème de transport)
- Solution optimale :

$$(x_{\text{U1,U2}}, x_{\text{U1,CD}}, x_{\text{U1,E1}}, x_{\text{U2,CD}}, x_{\text{CD,E2}}, x_{\text{E1,E2}}, x_{\text{E2,E1}}) = (0,40,10,40,80,0,20)$$

- Le nombre d'unités transportées doit toujours être une valeur entière, donc l'hypothèse de divisibilité semble ne pas être satisfaite dans ce modèle mais :
- Pour un problème de flot à coût minimum (dont les paramètres sont entiers), il existe toujours une solution optimale entière (on peut le prouver)
- Confirmation de ce résultat dans ce cas particulier

Exemple 3 : Composition d'aliments pour le bétail

- On désire déterminer la composition, à côut minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

Produit brut	1 ORGE	2 ARACHIDES	3 SESAME	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
Pourcentage de graisses	2%	2%	10%	3,60%
Coût par tonne	25	41	39	

- On notera x_j (j = 1,2,3) la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébriquement.
- Montrer qu'il est est possible de réduire la dimension du problème en éliminant x_1.
- Résoudre graphiquement ce problème.

Modèle général de PL

- m ressources (3 usines)
- n activités (2 produits)
- x_j : niveau de l'activité j (taux de production du produit j)
- Mesure de performance globale (profit total) : Z
- Accroissement de Z résultant de l'augmentation d'une unité du niveau de l'activité j : c_j
- Quantité disponible de la ressource i : b_i
- Quantité de ressource i consommée par l'activité j : a_{ij}

Modèle général de PL (suite)

Objectif

$$\text{Maximiser } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Contraintes fonctionnelles

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$

Contraintes de non négativité

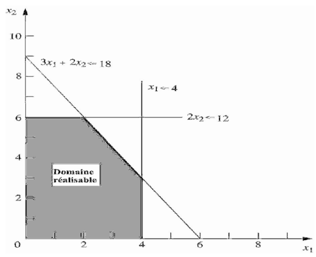
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

3. Première utilisation d'un solveur

- Résoudre le PL servant d'exemple à l'aide du solveur d'Excel
- Bouton Office (rond), Options Excel, Compléments, Complément Solveur

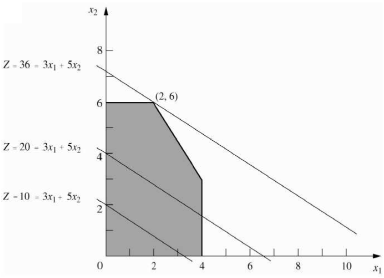
$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sous les contraintes} \left| \begin{array}{l} x_1 \le 4 \\ 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

4. Résolution graphique : un problème à deux variables



$$\begin{cases} \text{Maximiser } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. c.} \left| \begin{array}{l} x_1 \le 4 \\ 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Résolution graphique (suite)



Méthode graphique (résumé)

- Tracer les droites correspondant aux contraintes
- Déterminer le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte
- Tracer les droites correspondant à la variation de l'objectif
  - Dans l'exemple : $Z = 3x_1 + 5x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$
  - Ordonnée à l'origine (dépend de la valeur de Z) : $\frac{1}{5}Z$
  - Pente : $-\frac{3}{5}$
  - Maximiser correspond donc à augmenter Z
- Mais : uniquement pour les modèles à deux variables
- Plus de deux variables : méthode du simplexe

RCP104 Optimisation en Informatique

Chapitre 3 – Bases de la Programmation Linéaire (PL)

E. Soutif (eric.soutif@cnam.fr)

1. INTRODUCTION A LA PL (→ Fichier powerpoint)

2. MODELISATION DE PROBLEMES (→ Fichier powerpoint)

3. PREMIERE UTILISATION D'UN SOLVEUR (→ Fichier powerpoint)

4. RESOLUTION GRAPHIQUE : PROBLEME A DEUX VARIABLES (→ Fichier powerpoint)

5. METHODE DES TABLEAUX DU SIMPLES

5.1) Forme générale, canonique et standard d'un P.L.

- Forme générale. La forme générale d'un P.L. est la suivante :

$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i \in M) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i \in \overline{M}) \\ x_j \geq 0 & (j \in N) \\ x_j \text{ réel} & (j \in \overline{N}) \end{array} \right. \end{cases}$$

NB : si c et x sont deux vecteurs colonne :

$$cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(produit scalaire)}$$

$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = cx$ est appelée fonction objectif (ou fonction économique), notée souvent $z = f(x)$.

- Forme canonique :

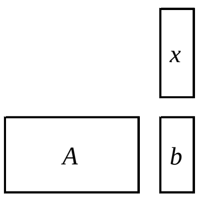
$$\begin{cases} \text{Max } cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- Forme standard :

$$\begin{cases} \text{Max } cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

NB : A est une matrice $m \times n$, x et c sont deux vecteurs colonnes de n composantes, b est un vecteurs à m composantes.

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m \end{cases}$$

Remarque : maximiser $z = f(x)$ revient à minimiser $-z = -f(x)$: $\max_{x\in X} f(x) = -\min_{x\in X} -f(x)$.

Résoudre $\begin{cases} \text{Min } cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$ revient donc à résoudre $\begin{cases} \text{Max} - cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$. Les solutions optimales sont les mêmes, les valeurs optimales sont opposées.

- Passage de la forme générale à la forme canonique :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \\ \displaystyle -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i \end{cases}$$

$$x_j \text{ réel } \ (j \in \bar{N}) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{On remplace la variable } x_j \text{ par deux variables } \geq 0,\, x_j^1 \text{ et } x_j^2 \text{ en posant :} \\ \qquad x_j = x_j^1 - x_j^2, \quad x_j^1, x_j^2 \geq 0 \end{cases}$$

- Passage de la forme générale à la forme standard :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{On introduit une variable dite variable d'écart (slack) positive ou nulle, } \bar{x}_i \text{ :} \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \bar{x}_i = b_i\,, \quad \text{avec} \quad \bar{x}_i \geq 0 \end{cases}$$

5.2) Polyèdre des solutions et représentation graphique

L'ensemble

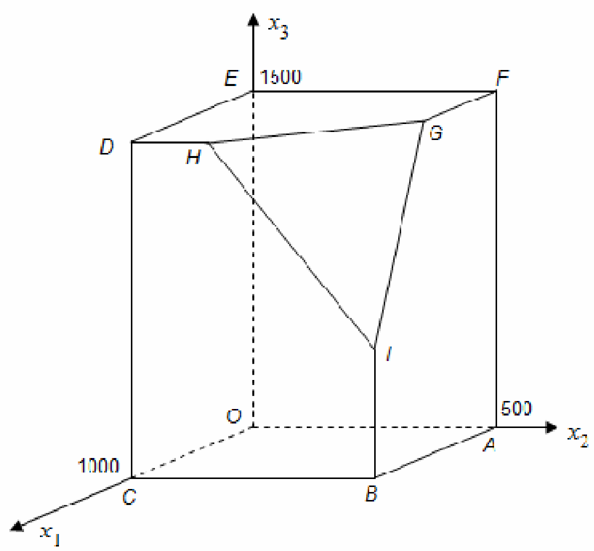
$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } Ax = b, x \geq 0\}$$

est appelé polytope des solutions associé à un P.L. Il s'agit d'un polytope convexe. S'il est borné, on parle de **polyèdre convexe**. Pour des problèmes à deux ou trois variables (cas d'école), on peut représenter le polyèdre des solutions.

Un vecteur $x \in X$ est dit **solution réalisable** ou **admissible** du P.L. considéré.

Exemple : Polyèdre des solutions du PL suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } \ z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \qquad \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq 500 \\ x_3 \leq 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$



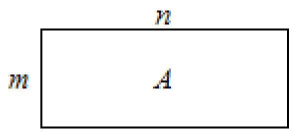
Le plan *GHI* a pour équation : $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6750$

L'ensemble des solutions réalisables est l'ensemble des points situés à l'intérieur du polyèdre (*OABCDEFGHI*).

5.3) <u>Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres</u>

On considère un P.L. sous sa forme standard :

$$\begin{cases} \text{Max } cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$



On considère que le rang de la matrice *A* est *m*.

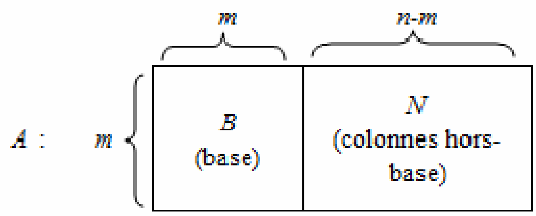
<u>NB</u> : rang(*A*) = dimension de la plus grande sous-matrice carrée régulière (= inversible, de déterminant ≠ 0) que l'on peut extraire de A

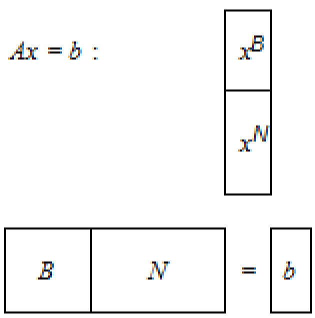
<u>Remarque</u> : On peut toujours le supposer : si rang(*A*) < *m*, une ou plusieurs lignes de *A* peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des autres. Suivant la valeur des coefficients b_i , les contraintes correspondantes sont soit redondantes (on peut alors les éliminer), soit incompatibles avec les autres (*Ax* = *b* n'a alors pas de solution).

<u>Définition</u> : On appelle **matrice de base** (ou encore, par un léger abus de langage, base) toute sous-matrice carrée inversible ($m \times m$) extraite de A (il en existe au moins une puisque rang(*A*) = *m*).

<u>Définition</u> : On appelle **base** l'ensemble des indices des colonnes qui constitue une matrice de base (on appelera également base l'ensemble de variables correspondant à ces colonnes).

Soit *B* une matrice de base. En permutant les colonnes, on peut mettre *A* sous la forme *A*=[*B*, *N*] où *N* est la sous-matrice des colonnes hors-base. De même, on peut écrire *x* sous la forme $\begin{pmatrix} x^B \\ \cdots \\ x^N \end{pmatrix}$ et *c* : $\begin{pmatrix} c^B \\ \cdots \\ c^N \end{pmatrix}$.





L'équation *Ax* = *b* s'écrit alors :

$$Bx^B + Nx^N = b \qquad (1)$$

x^B : variables de base
x^N : variables hors-base

Définition : On appelle **solution de base** (associée à la base *B*) la solution particulière de (1) obtenue en posant $x^N = 0$. x^B est alors déterminé de façon unique par la résolution du système (de Cramer) : $Bx^B = b$, c'est-à-dire : $x^B = B^{-1}b$. On notera $\bar{b}$ le vecteur $B^{-1}b$.

Solution de base associée à la base *B* : $\begin{cases} x^N = 0 \\ x^B = B^{-1}b \ \ (= \bar{b}) \end{cases}$

Définition : Une solution de base est dite **solution de base réalisable** si $x^B \geq 0$, i.e. : $\bar{b} \geq 0$.

Définition : Une base correspondant à une solution de base réalisable est appelée **base réalisable**.

Définition : Une solution de base est dite **dégénérée** si le vecteur $x^B = \bar{b}$ a une ou plusieurs composantes nulles.

La dégénérescence est un phénomène fréquent dans certains problèmes (flots, transport, plus courts chemins).

Définition : On appelle point extrême tout point x de $X = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } Ax = b, x \geq 0\}$ qui ne peut s'exprimer comme combinaison convexe d'autres points y de X $(y \neq x)$: x ne peut s'écrire $x = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k y^k,\ \lambda_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$.

5.5) Caractérisation algébrique des points extrêmes

Théorème 1 : L'ensemble des points extrêmes de X correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.

Démonstration :

a) x solution de base réalisable $\Rightarrow$ x point extrême

En effet, on a $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.

Supposons que $x = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \quad (0 < \lambda < 1,\ \alpha \in X, \beta \in X, \alpha \neq \beta \neq x)$,

avec : $\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n) \end{cases}$

On doit alors avoir : $\lambda\alpha_j + (1-\lambda)\beta_j = 0 \quad \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$.

Les *m* premières composantes de α et β sont déterminées de façon unique par la résolution du système de Cramer $Bx^B = b$, d'où $x = \alpha = \beta$ $\rightarrow$ contradiction.

b) x point extrême$\Rightarrow$ x solution de base réalisable démonstration non vue ici. ■

Corollaire 1 : Il y a un nombre fini de points extrêmes $\leq C_n^m$.

(En effet, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ est le nombre de possibilités de choisir *m* colonnes de *A* parmi *n* et toutes les sous-matrices extraites de *A* ne sont pas inversibles et réalisables.)

Corollaire 2 : Tout point de *X* est combinaison convexe des points extrêmes de *X*. (Démonstration non vue ici.)

<u>Théorème 2</u> (Optimalité en un point extrême) : L'optimum de *z* sur *X* est atteint en au moins un point extrême. S'il est atteint en plusieurs points extrêmes, il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points extrêmes.

<u>Démonstration</u> :

Soient $y^1, y^2, \dots, y^K$ les points extrêmes de X. Posons $z^* = \max_{k\in\{1,\dots,K\}} z(y^k)$ (avec $z(x) = cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$). Montrons qu'alors $z^* = \max_{x\in X} z(x)$.

D'après le corollaire 2, tout point x de X peut s'écrire $x = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k y^k$ avec $\lambda_k \geq 0\ \forall k$ et $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} z(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{k=1}^{K} \lambda_k y_j^k\right) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^k \\ &= \sum_{k=1}^{K} \lambda_k z(y^k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} \lambda_k z^* = z^* \end{aligned}$$

■

5.5) <u>Caractérisation des solutions de base réalisables optimales</u>

<u>Théorème 3</u> : Soit *B* une base réalisable non dégénérée ($\bar{b} = B^{-1}b > 0$). *B* est une base réalisable <u>optimale</u> si et seulement si :

$$\forall j \in N, \qquad \Delta_j = c_j - \sum_{i\in B} \bar{a}_{ij} c_j \leq 0$$

(Δ_j est appelé le <u>coût réduit</u> de la variable hors-base x_j)

avec : $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}] = B^{-1}A = \begin{array}{|c|c|}\hline I & \bar{N}=B^{-1}N \\ \hline\end{array}$

<u>Démonstration</u> :

Soit *x* une solution quelconque de *X* (pas nécessairement de base). On a toujours :

$$\begin{aligned} &Ax = B \\ &Bx^B + Nx^N = b \\ &x^B + B^{-1}Nx^N = B^{-1}b \\ &x^B + \bar{N}x^N = \bar{b} \end{aligned}$$

Pour $i \in B$, on a donc :

$x_i + \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij}\, x_j = \bar{b}_i$ (On exprime les variables de base en fonction des variables hors-base)

Ré-écrivons maintenant la fonction objectif en ne faisant apparaître que les variables hors-base :

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i\in B} c_i x_i + \sum_{j\in N} c_j x_j$$

$$z(x) = \sum_{i\in B} c_i \left(\bar{b}_i - \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j\right) + \sum_{j\in N} c_j x_j$$

$$z(x) = \sum_{i\in B} c_i\bar{b}_i + \sum_{j\in N}\left(c_j - \sum_{i\in B}\bar{a}_{ij}c_i\right)x_j = \sum_{i\in B} c_i\bar{b}_i + \sum_{j\in N}\Delta_j x_j$$

$$z(x) = \bar{z} + \sum_{j\in N}\Delta_j x_j$$

avec $\bar{z} = \sum_{i\in B} c_i\bar{b}_i$ =constante

Condition suffisante : $(\forall j\ \ \Delta_j \leq 0) \Rightarrow B$ base réalisable optimale

En effet, soit x_0 la solution de base réalisable : $\begin{cases} x_0^N = 0 \\ x_0^B = B^{-1}b \end{cases}$

$$z(x_0) = cB^{-1}b = \sum_{i\in B} c_i\bar{b}_i = \bar{z}$$

$$\forall x \in X, z(x) = \bar{z} + \textstyle\sum_{j\in N}\Delta_j x_j \leq \bar{z} = z(x_0) \quad \text{(car } \Delta_j \leq 0\ et\ x_j \geq 0\text{)}$$

$\Rightarrow x_0$ est une solution optimale.

Condition nécessaire : Montrons que s'il existe $s \in N$ tel que $\Delta_s > 0$, alors on peut construire une solution meilleure.

Pour $\in B, x_i = \bar{b}_i - \sum_{j\in N}\bar{a}_{ij}x_j = \bar{b}_i - \sum_{\substack{j\in N\\ j\neq s}}\bar{a}_{ij}x_j - \bar{a}_{is}x_s$.

On va alors augmenter la valeur de x_s qui va passer de la valeur 0 à une valeur θ>0. On considère la solution $\hat{x}$:

$$\begin{cases} \hat{x}_s = \theta \\ \hat{x}_j = 0 \qquad \forall j \in N - \{s\} \\ \hat{x}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}\theta \quad \forall i \in B \end{cases}$$

$\bar{b_i}$ étant positif, on peut toujours trouver $\theta > 0$ suffisamment petit pour que x_i soit positif ou nul :

$$\theta \leq \min_{i\ tq\ \bar{a}_{is}>0}\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$$

Remarque : si tous les $\bar{a}_{is}$ sont négatifs ou nuls, on peut alors choisir θ aussi grand que l'on veut et le problème de départ admet une solution infinie.

La fonction objectif décroît alors strictement : $z(\hat{x}) = z(x_0) + \underbrace{\Delta_s}_{>0}\underbrace{\theta}_{>0}$ ■

Propriété : Soit *B* une base réalisable et x_0 la solution de base associée. S'il existe une variable hors-base x_s telle que $\Delta_s > 0$, alors :

1. Ou bien on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_s sans sortir de l'ensemble des solutions réalisables et l'optimum du problème est $z = +\infty$ (c'est le cas si $\bar{a}_{is} \leq 0\ \forall i$)
2. Ou bien on met en évidence une autre base $\hat{B}$ et une autre solution réalisable $\hat{x}$ telle que
   - $z(\hat{x}) > z(x_0)$ si *B* était non dégénérée
   - $z(\hat{x}) \geq z(x_0)$ si *B* était dégénérée

(On calcule $\theta = \min_{i\ tq\ \bar{a}_{is}>0} \left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}\right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$, qui peut être nul si B était dégénérée, et $\hat{x}$ est défini comme dans la démonstration précédente. $\hat{x}_s > 0$ et $\hat{x}_r = \bar{b}_r - \theta\bar{a}_{rs} = 0$: $\hat{x}$ est une solution de base.

Remarques :

- on passe de la base *B* à la base $\hat{B}$ en “échangeant” les colonnes *r* et *s.*
- en cas de dégénérescence, un phénomène de cyclage peut se produite : on passe de bases en bases sans faire augmenter strictement la valeur de la solution de base courante. Il est alors possible, au bout d’un certains nombre de changements de base, de retomber sur une base précédemment visitées. Toutefois, même si la dégénérescence est fréquente, le cyclage, lui, est un phénomène rarissime et dont il est possible de se prémunir théoriquement (utilisation des règles de Bland, non vues ici).

5.6) Algorithme du simplexe

Algorithme

a) Déterminer une solution de base réalisable *B*.
b) Calculer $\bar{N} = B^{-1}N = [\bar{a}_{ij}]$ et les coûts réduits : $\Delta_j = c_j - \sum_{i\in B} \bar{a}_{ij}c_j \ \ (j \in N)$.
c) **si** $\Delta_j \leq 0 \ \ \forall j \in N$,

   alors la solution considérée est optimale. (→ FIN)

   sinon soit $J = \{j\ tq\ \Delta_j > 0\}$.

   finsi

d) **si** $\bar{A}_j \leq 0$ ($j^{ème}$ colonne) pour au moins un indice $j \in J$

   alors $z^* = +\infty$ (→ FIN)

   sinon soit *s* tel que $\Delta_s = \max_{j\in J} \Delta_j$ (1er critère de Dantzig, ou critère d’entrée) déterminer *r* tel que $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{i\ tq\ \bar{a}_{is}>0} \left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}\right\}$ (2ème critère de Dantzig ou critère de sortie)

   finsi

   Remarque : seul le deuxième critère est obligatoire (pour rester à l’intérieur de *X*).

e) Considérer la nouvelle base $\hat{B} = B - \{r\} + \{s\}$ et retour en b)

Géométiquement, cet algorithme correspond à un cheminement de point extrême en point extrême adjacent le long de la frontière de *X*.

D’un point de vue algébrique, il correspond à déterminer une suite de bases adjacentes $B^0, B^1, \dots, B^q$ et donc de solutions de base $x_0, \dots, x_q$ telles que $z(x_0) \leq z(x_1) \leq \cdots \leq z(x_q)$.

Théorème 4 : L’algorithme du simplexe converge.

(Ce théorème n'est pas démontré ici, sa preuve repose sur la finitude du nombre de bases et sur la possibilité de se prémunir du cyclage).

5.7) Base de départ

On s'arrange toujours pour faire apparaître une matrice identité dont les colonnes vont former la base de départ initiale, au besoin en transformant le problème de départ par introduction de variables supplémentaires :

- Des variables d'écart, qui permettent de transformer une inégalité de type $\leq$ en une égalité ; Si toutes les contraintes de départ sont des contraintes de type $\leq$, les variables d'écart forment une base de départ "naturelle".
- Eventuellement des variables artificielles qui permettent de traiter des inégalités de type $\geq$ ou des égalités.

Exemple 1 :

$$(P_1)\begin{cases} maximiser\ z_1 = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ s.c. \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = \ \ 3 \\ -x_1 + 3x_2 \quad = -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Il s'agit de contraintes d'égalité : on multiplie la deuxième contrainte par -1 pour avoir des seconds membres positifs ou nuls, puis on introduit deux variables artificielles : y_1 et y_2 avec un coût –M<0 très grand en valeur absolue dans la fonction objectif. A l'optimum, $opt(P_1') = opt(P_1)$:

$$(P_1')\begin{cases} maximiser\ z_1' = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - My_1 - My_2 \\ s.c. \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + \ \ x_2 - x_3 + y_1 \qquad = 3 \\ x_1 - 3x_2 \qquad\qquad + y_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Base de départ : $(y_1, y_2), B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 :

$$(P_2)\begin{cases} maximiser\ z_2 = -x_1 + 2x_2 \\ \qquad s.c. \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + \ x_2 \ \leq 3 \\ x_1 - 3x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

On introduit deux variables d'écart $x_{\bar{1}}$ et $x_{\bar{2}}$ dans les deux premières contraintes pour les transformer en contraintes d'égalité. La deuxième contrainte étant de type $\geq$, $x_{\bar{2}}$ est affectée du signe moins :

$$\begin{cases} maximiser\ z_2 = -x_1 + 2x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} x_1 + \ x_2 + x_{\bar{1}} \qquad = 3 \\ x_1 - 3x_2 \qquad - x_{\bar{2}} = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_{\bar{1}} \geq 0, x_{\bar{2}} \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Puis, comme on n'a toujours pas fait apparaître la matrice identité, on introduit une variable artificielle y_2 de coût –M<0 très grand (en valeur absolue) :

$$(P_2')\begin{cases} maximiser\ z_2' = -x_1 + 2x_2 - My_2 \\ s.c. \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_{\bar{1}} \qquad\qquad = 3 \\ x_1 - 3x_2 \qquad - x_{\bar{2}} + y_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_{\bar{1}} \geq 0, x_{\bar{2}} \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Base réalisable de départ : $(x_{\bar{1}}, y_2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.8) <u>Tableaux du simplexe</u>

Pour faciliter la résolution "à la main" d'un PL, on met le programme sous la forme suivante :

- *z* est exprimée en fonction des variables hors-base (les coefficients de la fonction objectif sont alors directement les coûts réduits) ;
- les colonnes de la matrice de base forment (à une permutation près) une matrice identité.
- Chaque ligne représente une contrainte du PL, sauf la dernière qui représente la fonction objectif écrite en faisant apparaître les coûts réduits (elle ne comporte que les variables hors-base)
- La dernière case du tableau contient l'opposé de la constante de la fonction objectif, c'est-à-dire l'opposé de la valeur de la solution de base associée à la base courante

Soit le problème :

$$\begin{cases} maximiser\ z = x_1 + 2x_2 \\ s.c. \quad \left| \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

On introduit des variables d'écart $x_{\bar{1}}$, $x_{\bar{2}}$ et $x_{\bar{3}}$:

$$\begin{cases} maximiser\ \ z = x_1 + 2x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 + x_{\bar{1}} \qquad\qquad \leq 2 \\ -\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_{\bar{2}} \qquad \leq 4 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_{\bar{3}} \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_{\bar{1}} \geq 0, x_{\bar{2}} \geq 0, x_{\bar{3}} \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Les variables d'écart constituent une base de départ : $B = \{x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}\}$.

Le **<u>premier tableau du simplexe</u>** s'écrit alors :

B	x_1	x_2	$\boxed{x_{\bar{1}}}$	$\boxed{x_{\bar{2}}}$	$\boxed{x_{\bar{3}}}$	$\bar{b}$	
$\leftarrow x_{\bar{1}}$	-3	$\boxed{2}$	1	0	0	2	L_1
$x_{\bar{2}}$	-1	2	0	1	0	4	L_2
$x_{\bar{3}}$	1	1	0	0	1	5	L_3
Δ	1	2	0	0	0	-0	L_4
		$\uparrow$					

Solution de base associée à ce tableau : $\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \quad \text{(variables hors-base)} \\ x_{\bar{1}} = 2, x_{\bar{2}} = 4, x_{\bar{3}} = 5 \text{ (var. de base)} \end{cases}$ de valeur $z = 0$.

La base n'est pas optimale car Δ n'est pas ≤ 0. On effectue donc une nouvelle itération de l'algorithme du simplexe :

- $\boldsymbol{x_2}$ **entre en base** (plus grand coût réduit)
- $\mathrm{Min}\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}\right) = \frac{2}{2}$, obtenu pour la ligne de $x_{\bar{1}}$: $\boldsymbol{x_{\bar{1}}}$ **sort de la base**.

On pivote alors autour de l'élément 2 du tableau (ligne 1, colonne2), c'est-à-dire qu'on effectue les combinaisons linéaires qui permettent que la nouvelle colonne de x_2 corresponde à l'ancienne colonne de $x_{\bar{1}}$.

D'où le **<u>deuxième tableau du simplexe</u>** :

B	x_1	$\boxed{x_2}$	$x_{\bar{1}}$	$\boxed{x_{\bar{2}}}$	$\boxed{x_{\bar{3}}}$	$\bar{b}$	
x_2	-3/2	**1**	1/2	0	0	1	$L'_1 = \frac{1}{2}L_1$
$\leftarrow x_{\bar{2}}$	$\boxed{2}$	**0**	-1	1	0	2	$L'_2 = L_2 - L_1$
$x_{\bar{3}}$	5/2	**0**	-1/2	0	1	4	$L'_3 = L_3 - \frac{1}{2}L_1$
Δ	4	**0**	-1	0	0	-2	$L'_4 = L_4 + L_1$
	↑						

Solution de base associée à ce tableau : $\begin{cases} x_1 = x_{\bar{1}} = 0 \quad \text{(variables hors-base)} \\ x_2 = 1, x_{\bar{2}} = 2, x_{\bar{3}} = 4 \text{ (var. de base)} \end{cases}$ de valeur $z = 2$.

Cette nouvelle base n'est toujours pas optimale car Δ n'est pas ≤ 0. On effectue donc une nouvelle itération de l'algorithme du simplexe :

- $\boldsymbol{x_1}$ **entre en base** (plus grand coût réduit)
- $\mathrm{Min}\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{5/2}\right) = \frac{2}{2}$, obtenu pour la ligne de $x_{\bar{2}}$: $\boldsymbol{x_{\bar{2}}}$ **sort de la base**.

D'où le **<u>troisième tableau du simplexe</u>** :

B	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$\boxed{x_{\bar{3}}}$	$\bar{b}$	
x_2	**0**	1	-1/2	3/4	0	5/2	$L''_1 = L'_1 + \frac{3}{4}L'_2$
x_1	**1**	0	-1/2	1/2	0	1	$L''_2 = \frac{1}{2}L'_2$
$\leftarrow x_{\bar{3}}$	**0**	0	$\boxed{3/4}$	-5/4	1	3/2	$L''_3 = L'_3 - \frac{5}{4}L'_2$
Δ	**0**	0	1	-2	0	-6	$L''_4 = L'_4 - 2L'_2$
			↑				

Solution de base associée à ce tableau : $\begin{cases} x_{\bar{1}} = x_{\bar{2}} = 0 \qquad \text{(variables hors-base)} \\ x_2 = 5/2, x_1 = 1, x_{\bar{3}} = 3/2 \text{ (var. de base)} \end{cases}$ de valeur $z = 6$.

Cette nouvelle base n'est toujours pas optimale car Δ n'est pas ≤ 0. On effectue donc une nouvelle itération de l'algorithme du simplexe :

- $\boldsymbol{x_{\bar{1}}}$ **entre en base** (plus grand coût réduit)
- $\mathrm{Min}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$, obtenu pour la ligne de $x_{\bar{3}}$: $\boldsymbol{x_{\bar{3}}}$ **sort de la base**.

D'où le **quatrième tableau du simplexe** :

B	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$\boxed{x_{\bar{1}}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$\bar{b}$	
x_2	0	1	**0**	1/3	1/3	3	$L_1''' = L_1'' + \frac{2}{3}L_3''$
x_1	1	0	**0**	-1/3	2/3	2	$L_2''' = L_2'' + \frac{2}{3}L_3''$
$x_{\bar{1}}$	0	0	**1**	-5/3	4/3	2	$L_3''' = \frac{4}{3}L_3''$
Δ	0	0	**0**	-1/3	-4/3	-8	$L_4''' = L_4'' - \frac{4}{3}L_3''$

Solution de base associée à ce tableau : $\begin{cases} x_{\bar{2}} = x_{\bar{3}} = 0 \quad \text{(variables hors-base)} \\ x_2 = 3, x_1 = 2, x_{\bar{1}} = 2 \text{ (var. de base)} \end{cases}$ de valeur $z = 8$.

Cette base est (enfin) optimale car $\Delta \leq 0$. La solution de base associée est donc la solution optimale du problème. **L'optimum** du PL de départ est donc $\boldsymbol{x}^* = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$. **La valeur optimale** est $\boldsymbol{z}^* = \mathbf{8}$.

6. DUALITE EN PROGRAMMATION LINEAIRE

La dualité une notion fondamentale en PL. Chaque PL de maximisation donne lieu à un PL de minimisation appelé son problème dual. Les deux problèmes sont liés : chaque solution admissible de l'un fournit une borne de la valeur optimale de l'autre et si les deux problèmes ont des solutions, leurs valeurs optimales coïncident.

6.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

Exemple :

$$(P) \begin{cases} \text{Max } z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{ll} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 & L_1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 & L_2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 & L_3 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ à } 4 & \end{array} \right. \end{cases}$$

On veut évaluer la valeur de z^*.

Pour en avoir un minorant, on peut toujours chercher une solution réalisable de (*P*) dont la valeur fournira un minorant de z^*, mais sans garantie que cette valeur soit optimale.

Exemple :

$$\left. \begin{array}{l} z(0,0,1,0) = 5 \quad \rightarrow z^* \geq 5 \\ z(3,0,2,0) = 22 \quad \rightarrow z^* \geq 22 \\ z(2,1,1,1/3) = 15 \rightarrow z^* \geq 15 \end{array} \right\} \Rightarrow z^* \geq 22$$

Essayons d'obtenir un majorant de z^* cette fois, en nous servant des contraintes :

2ème contrainte × $\mathbf{\frac{5}{3}}$:

$$\underbrace{4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4}_{z} \leq \underbrace{\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}}_{5/3 \times [2^{\text{ème}} \text{ contrainte}]}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{z^* \leq \frac{275}{3} (\simeq 91{,}6)}$$

On peut faire beaucoup mieux : $L_2 + L_3$ donne :

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58 \quad \text{donc } \underline{z^* \leq 58}$$

On peut généraliser cette stratégie : on multiplie chaque contrainte L_i par un multiplicateur y_i (appelé variable duale) et on somme toutes les contraintes :

- Le premier cas présenté ($2^{\text{ème}}$ contrainte $\times \frac{5}{3}$) correspond à : $y_1 = 0, y_2 = \frac{5}{3}, y_3 = 0$
- Le deuxième cas correspond à : $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$

L'inégalité qui en résulte est :

$$\boxed{\begin{array}{c}(\boldsymbol{y_1 + 5y_2 - y_3})x_1 + (\boldsymbol{-y_1 + y_2 + 2y_3})x_2 + (\boldsymbol{-y_1 + 3y_2 + 3y_3})x_3 \\ +(\boldsymbol{3y_1 + 8y_2 - 5y_3})x_4 \quad \leq \quad \boldsymbol{y_1 + 55y_2 + 3y_3}\end{array}} \quad (1)$$

Chaque multiplicateur y_i doit être positif ou nul (sinon il y aurait un changement de sens de l'inégalité). De plus, on désire utiliser le membre de gauche de (1) comme majorant de

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4.$$

Cela n'est valide que si, pour chaque variable x_i, son coefficient dans (1) est supérieur ou égal à son coefficient dans *z*. Nous voulons donc :

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 5y_2 - y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 & \geq & 3 \end{array}$$

Si $y_i \geq 0 \ \forall i$ et si les 4 contraintes ci-dessus sont vérifiées, alors toute solution réalisable de (*P*) vérifie l'inégalité :

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

En particulier pour x^* cette inégalité est vraie. Donc : $z^* \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$. Comme on désire un majorant le plus petit possible on est naturellement amené à choisir pour *y* la solution du programme linéaire suivant, que l'on appelle programme dual de (*P*) :

$$(D)\begin{cases} \text{Min} \ \ y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{rcl} y_1 + 5y_2 - y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 & \geq & 3 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ à } 3 & & \end{array} \right. \end{cases}$$

6.2) <u>Généralisation</u>

Au problème (*P*) défini par :

$$(P)\begin{cases} \text{maximiser } \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, \ldots, n) \end{array} \right. \end{cases} \qquad \rightarrow \underline{\text{problème primal}}$$

on associe son **problème dual** (D) :

$$(D)\begin{cases}\text{minimiser } \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.c. } \left| \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j=1,\dots,n) \\ y_i \geq 0 & (i=1,\dots,m) \end{array}\right. \end{cases} \qquad \rightarrow \underline{\text{problème dual}}$$

Ou bien, sous forme matricielle :

$$(P)\begin{cases}\text{Max } z = cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}\right.\end{cases} \qquad (D)\begin{cases}\text{Min } w = yb \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array}\right.\end{cases}$$

NB : $(yA)^t = A^t y^t$. La matrice des contrainte de (D) est la transposée de celle de (P).

Prop : si (P) et (D) admettent des solutions réalisables, toute solution réalisable x de (P), $x = (x_1, \dots, x_n)$, et toute solution réalisable y de (D), $y = (y_1, \dots, y_m)$, vérifient :

$$\boxed{z = cx \leq yb = w} \quad (2)$$

Démonstration : $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ ■

Corollaire : si x^* et y^* sont deux solutions respectives de (P) et (D) qui vérifient $z(x^*) = w(y^*)$, alors il est possible de conclure immédiatement que x^* est optimal pour (P) et y^* pour (D).

6.3) Théorème de la dualité

Théorème : si le problème primal (P) a une solution optimale $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ alors le problème dual (D) a une solution optimale $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ telle que $\boxed{z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w^*}$.

Idée de la preuve :

- On considère le tableau simplexe optimal de (P) et on pose $y_i^* = -\Delta_i$ où Δ_i désigne le coût réduit de la $i^{\text{ème}}$ variable d'écart de (P) dans le tableau optimal de (P).
- On montre qu'alors y^* vérifie toutes les contraintes du dual et qu'il y a égalité entre les valeurs de x^* dans (P) et y^* dans (D).

Définition du dual dans le cas général

Pour un PL quelconque (pas nécessairement sous la forme canonique), on applique les règles d'écriture suivantes.

Problème de minimisation (Dual)	Problème de maximisation (Primal)
Fonction objectif : min	Fonction objectif : max
Second membre	Fonction objectif
A matrice des contraintes	A^t matrice des contraintes
Contrainte i de type $\geq$	Variable $y_i \geq 0$
Contrainte i de type $\leq$	Variable $y_i \leq 0$
Contrainte i de type $=$	Variable u_i non contrainte en signe
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte j de type $\leq$
Variable x_j non contrainte en signe	Contrainte j de type $=$

Attention, le tableau n'est pas symétrique, il faut considérer que la colonne de gauche est le problème de minimisation et la colonne de droite le problème de maximisation dans un couple primal/dual.

On observe en particulier que le dual du dual est le primal.

Exemple :

$$(PRIMAL) \begin{cases} \text{Min } \ 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{c} x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases} \qquad (DUAL) \begin{cases} \text{Max } \ y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{c} y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = -3 \\ y_1 \leq 0, \ \ y_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$