

Introduction au traitement du signal

S. Natkin

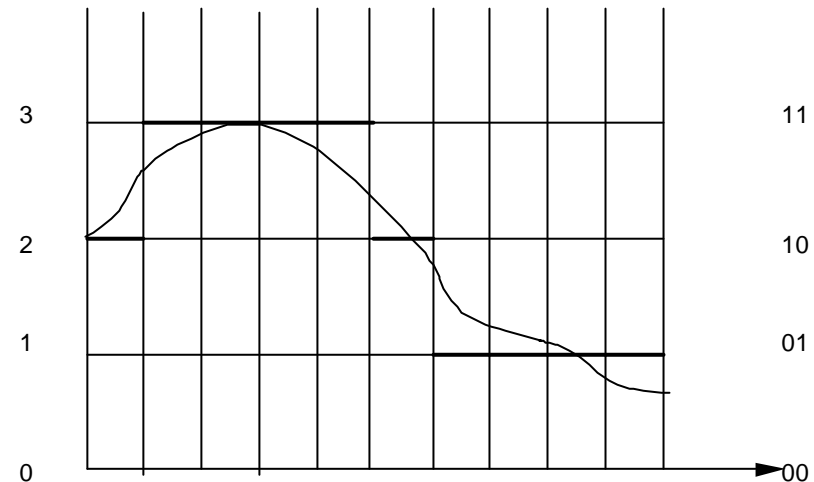
Avril 2003

Signaux

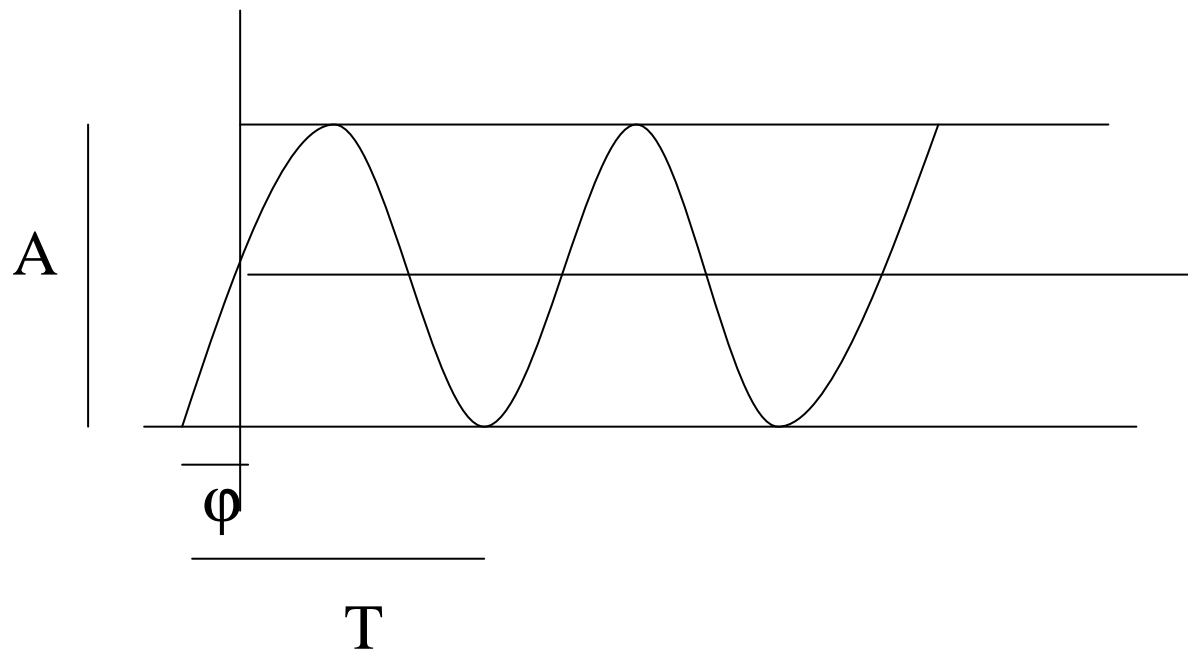
Toute information physique
est perçue comme une
grandeur variant dans le
temps (signal)

Numérisation \Leftrightarrow
échantillonnage dans le
temps et l'espace:

10111111111001010101



Quelques types de signaux (1)



Sinusoidal

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

A amplitude

φ phase

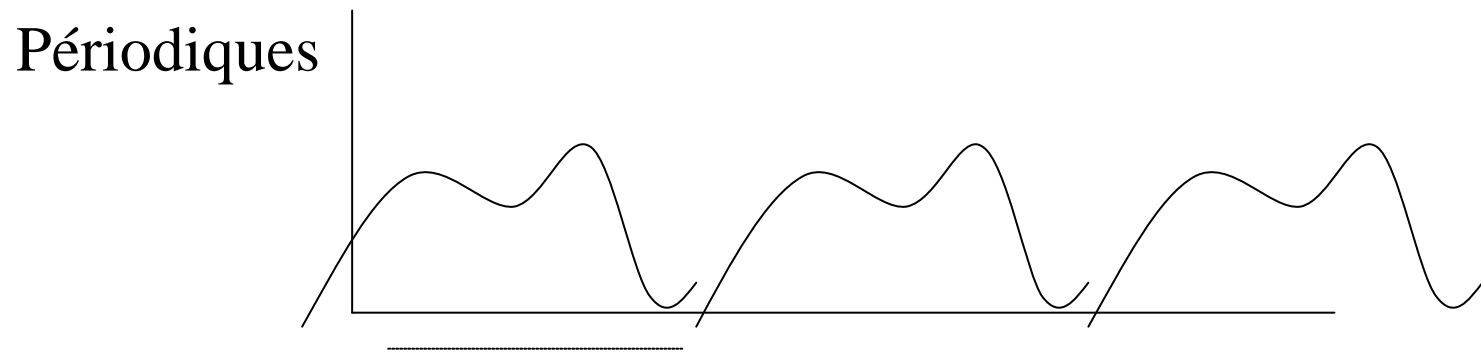
ω pulsation

T période (s)

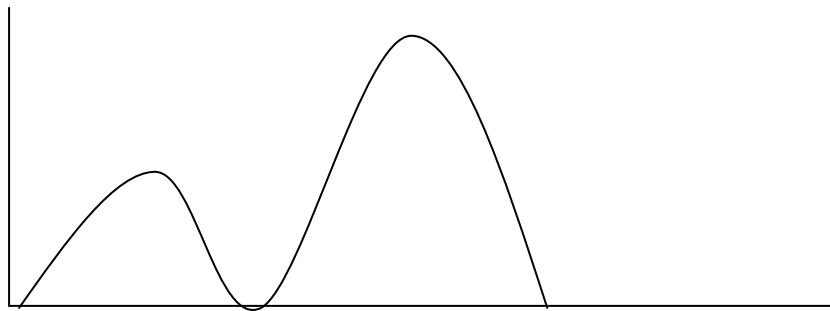
$f = 1/T$ fréquence fondamentale

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

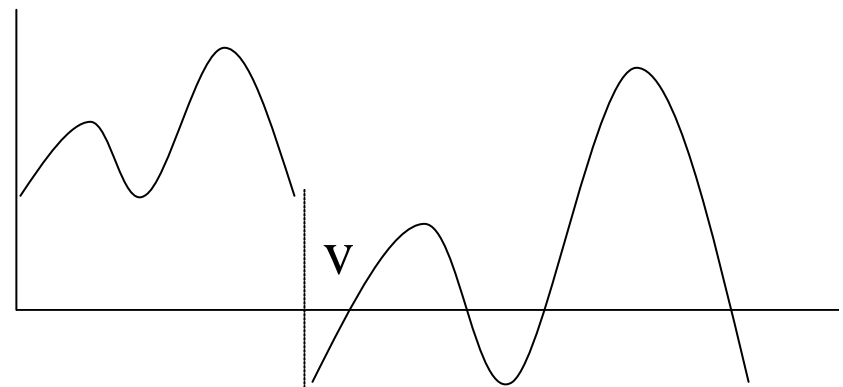
Quelques types de signaux (2)



T période $f=1/T$ fréquence fondamentale

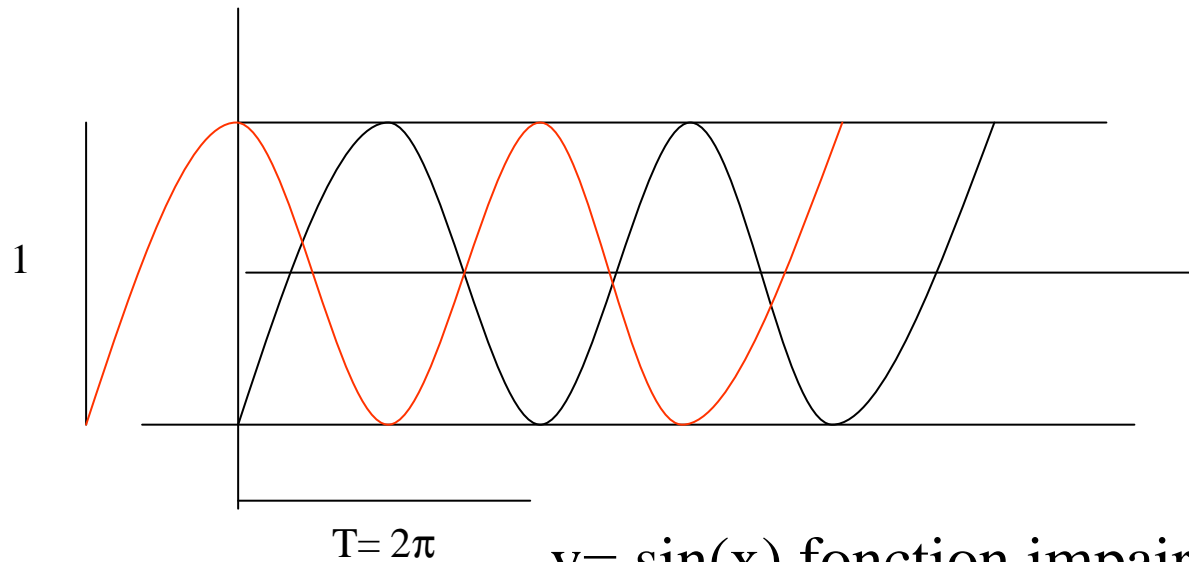


A support borné



A variation bornée ($v \ll B$)

Un peu de trigo de base



$y = \sin(x)$ fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$)

$y = \cos(x)$ fonction paire ($f(-x) = f(x)$)

$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t)\cos(\varphi) + A \cos(\omega t)\sin(\varphi)$

Représentation spectrale des signaux

Tout signal périodique borné et intégrable peut se représenter comme une série de fonctions sinusoidales dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale (série de Fourier).

Soit P l'intervalle d'amplitude T (une période)

$$f(t) = \sum_{n=0, \infty} c_n \sin(n\omega t + j_n)$$
$$= \sum_{n=0, \infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

avec

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

$$b_n = c_n \cos(j_n)$$

$$a_n = c_n \sin(j_n)$$

et

$$a_0 = 1/T \int_P f(t) dt$$

$$a_n = 2/T \int_P f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = 2/T \int_P f(t) \sin(n\omega t) dt$$

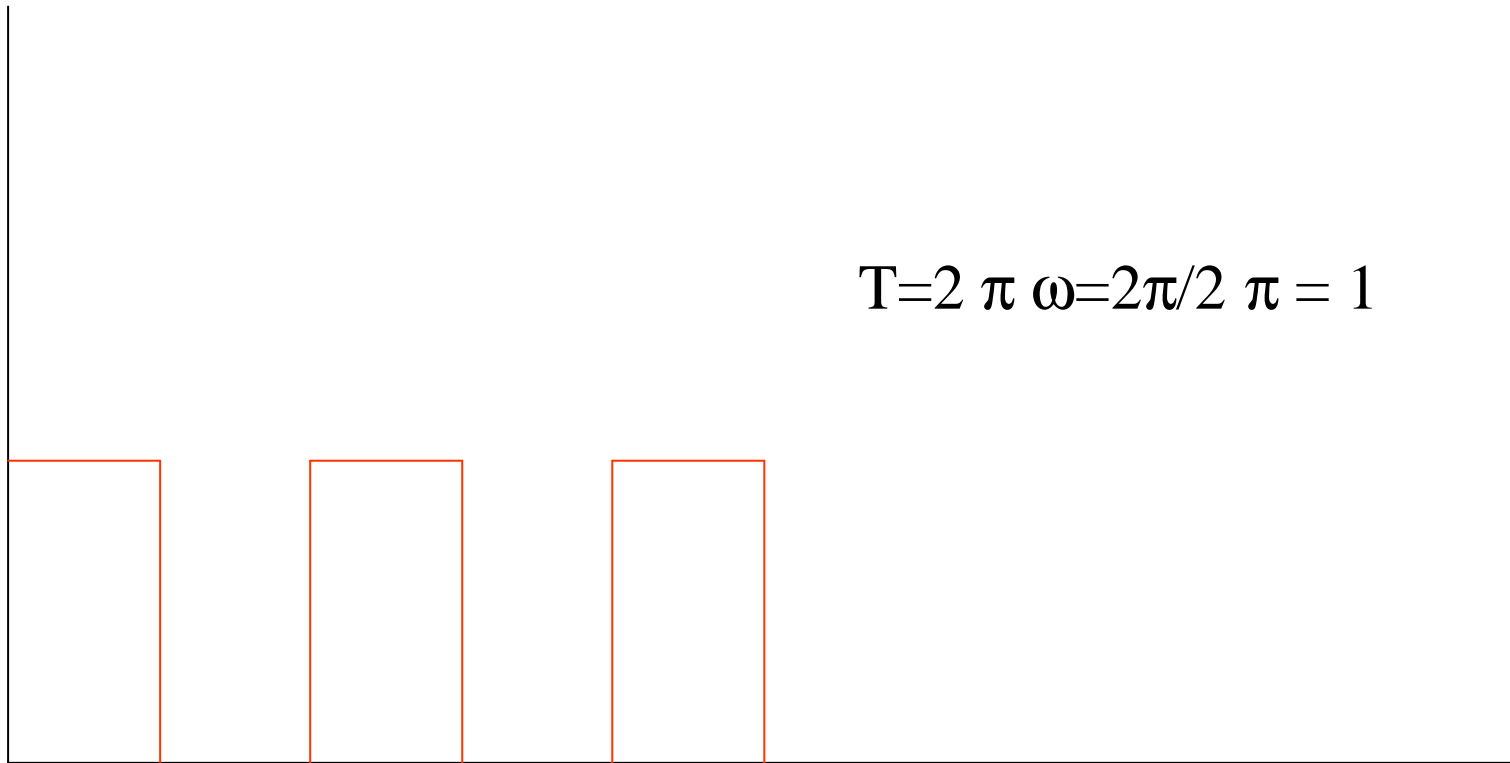
Représentation spectrale des signaux (2)

f est la fréquence fondamentale

$f_n = n/T = n.\omega/2\pi$ sont appelés les harmoniques

a_0 est la composante continue

Exemple signal d 'horloge



$$T=2\pi \quad \omega=2\pi/2\pi = 1$$

Signal d'horloge (2)

$$a_0 = 2 / 2p \int_0^p f(t) dt = 1$$

$$a_n = 0$$

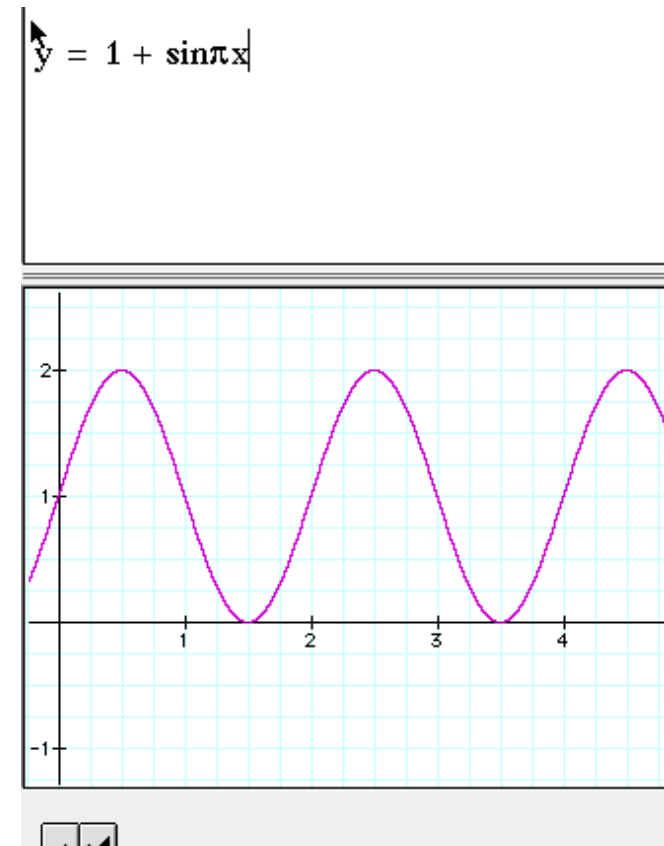
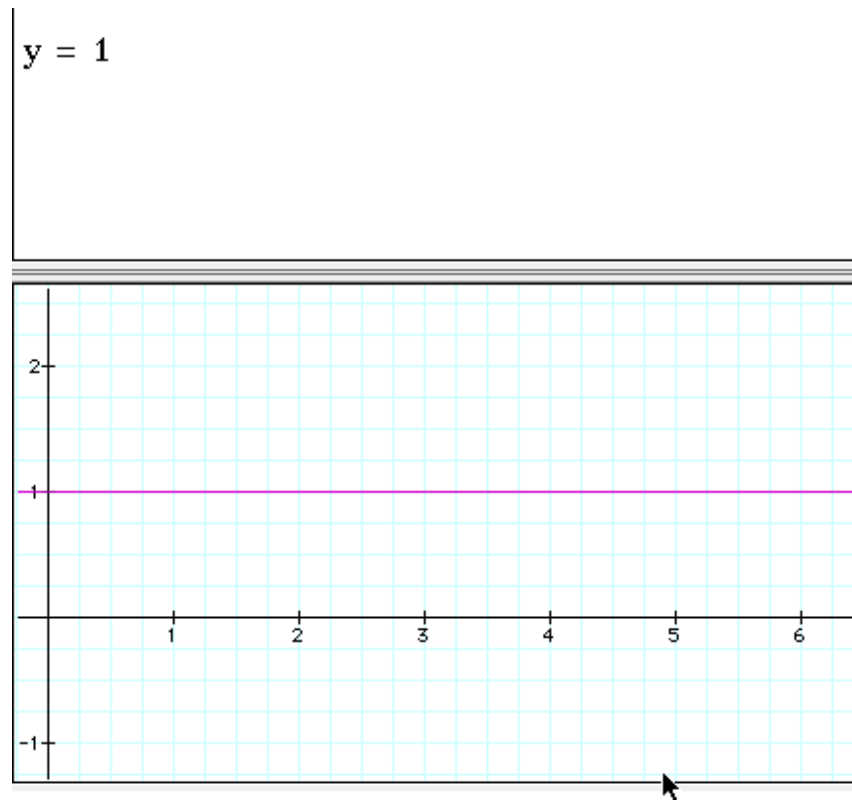
car la fonction est impaire

$$b_n = \int_0^{2p} \sin(nt) f(t) dt$$

$$= \int_0^p \sin(nt) 2 dt = 2 \left[-1/n \cos(nt) \right]_0^p$$

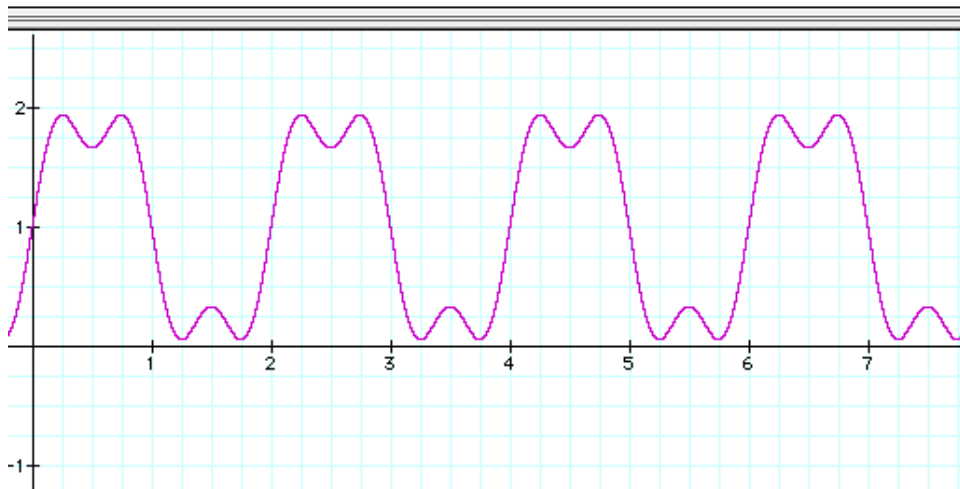
$$= 1/n \text{ pour } n \text{ impair}$$

Spectre du signal d'horloge (1)

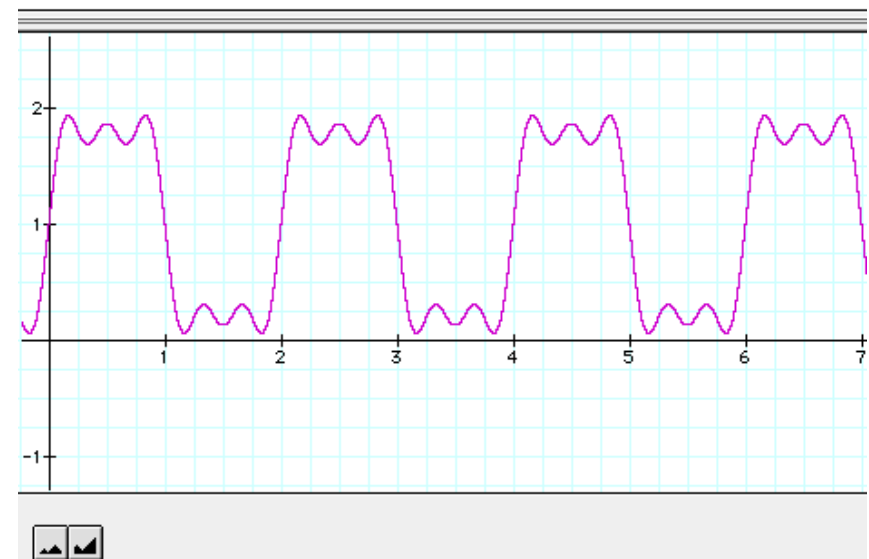


Spectre du signal d'horloge (3)

$$y = 1 + \sin\pi x + \frac{1}{3} \sin(3\pi x)$$

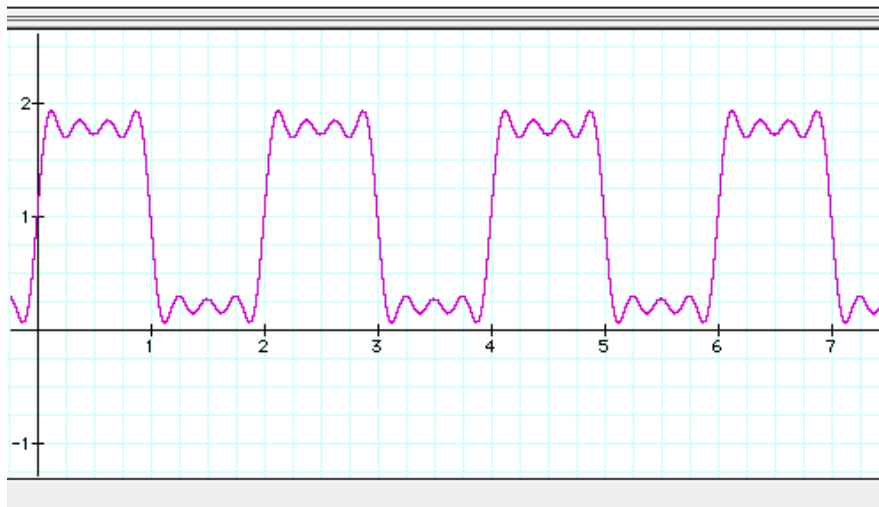


$$y = 1 + \sin\pi x + \frac{1}{3} \sin(3\pi x) + \frac{1}{5} \sin(5\pi x)$$

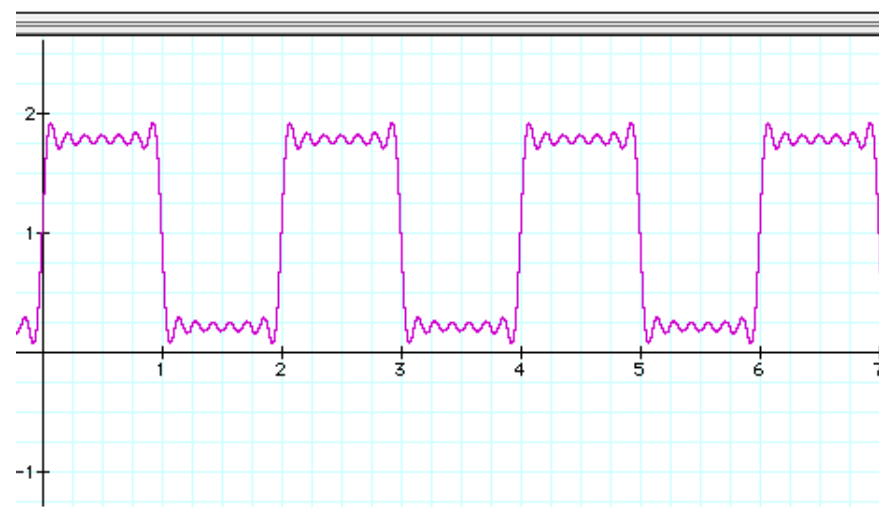


Spectre du signal d'horloge (4)

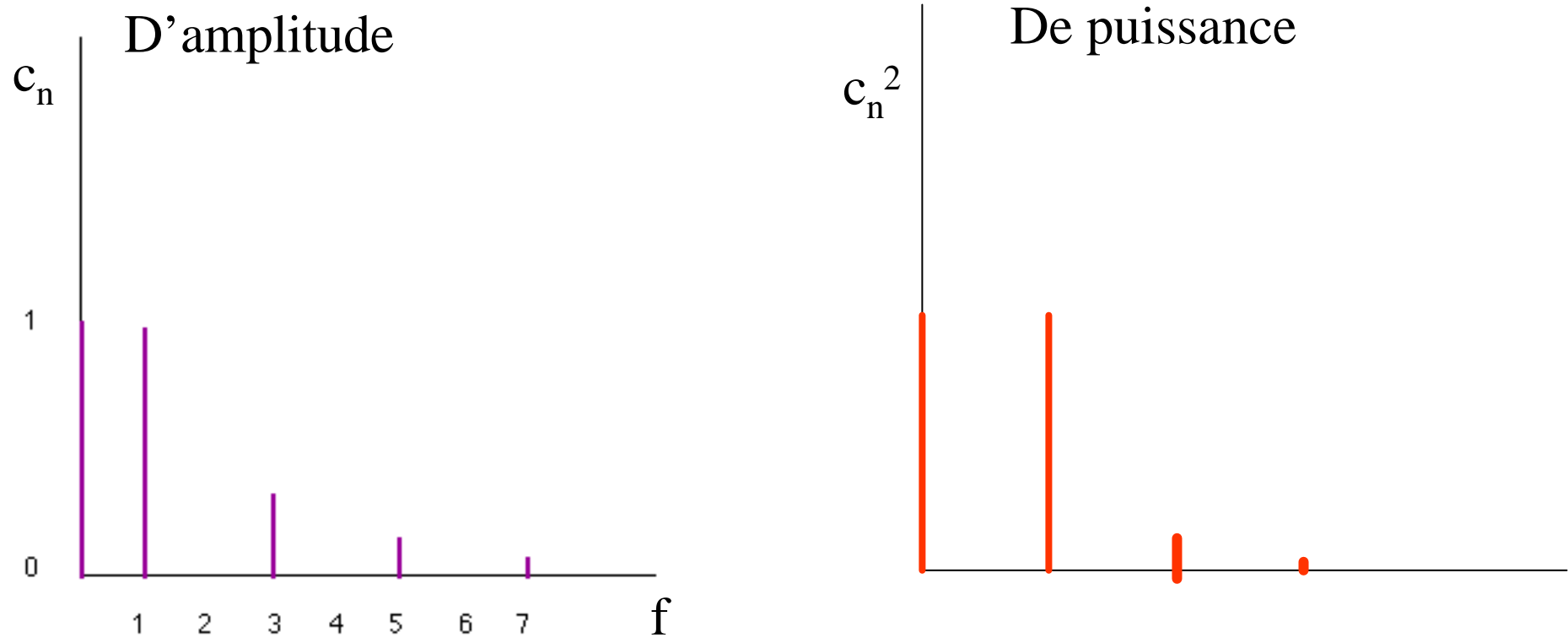
$$y = 1 + \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin (3 \pi x) + \frac{1}{5} \sin (5 \pi x) + \frac{1}{7} \sin (7 \pi x)$$



$$y = 1 + \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin (3 \pi x) + \frac{1}{5} \sin (5 \pi x) + \frac{1}{7} \sin (7 \pi x) + \frac{1}{9} \sin (9 \pi x) + \frac{1}{11} \sin (11 \pi x) + \frac{1}{13} \sin (13 \pi x)$$



Spectres



On représente aussi des spectres de phases
(Déphasage en radian ou en fraction de la période)

Généralisation de la représentation spectrale des signaux

Dans le cas de signaux presque périodiques ou à support borné la représentation se généralise. Au lieu d'avoir des harmoniques on trouve des « partielles ».

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0,\infty} c_n \sin(\omega_n t + \mathbf{j}_n) \\ &= \sum_{n=0,\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \end{aligned}$$

Enfin, les signaux "physiques" apériodiques peuvent se représenter comme une transformée intégrale d'une fonctions sinusoidale (transformée de Fourier). Dans ce cas le spectre est continu

$$f(t) = \int_{x=0,\infty} c(x) \cos(x\omega t + \mathbf{j}(x)) dx$$

Théorème de Parseval

Soit une fonction périodique de période T ou à support borné P d'amplitude T

On définit la puissance moyenne (énergie) de f par:

$$E = 1/(2T) \int_P |f(t)|^2 dt$$

Alors

$$E = 1/4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 1/4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^2$$

Autrement dit la puissance du signal est la somme de la puissance des harmoniques

REPRESENTATION SPECTRE x TEMPS

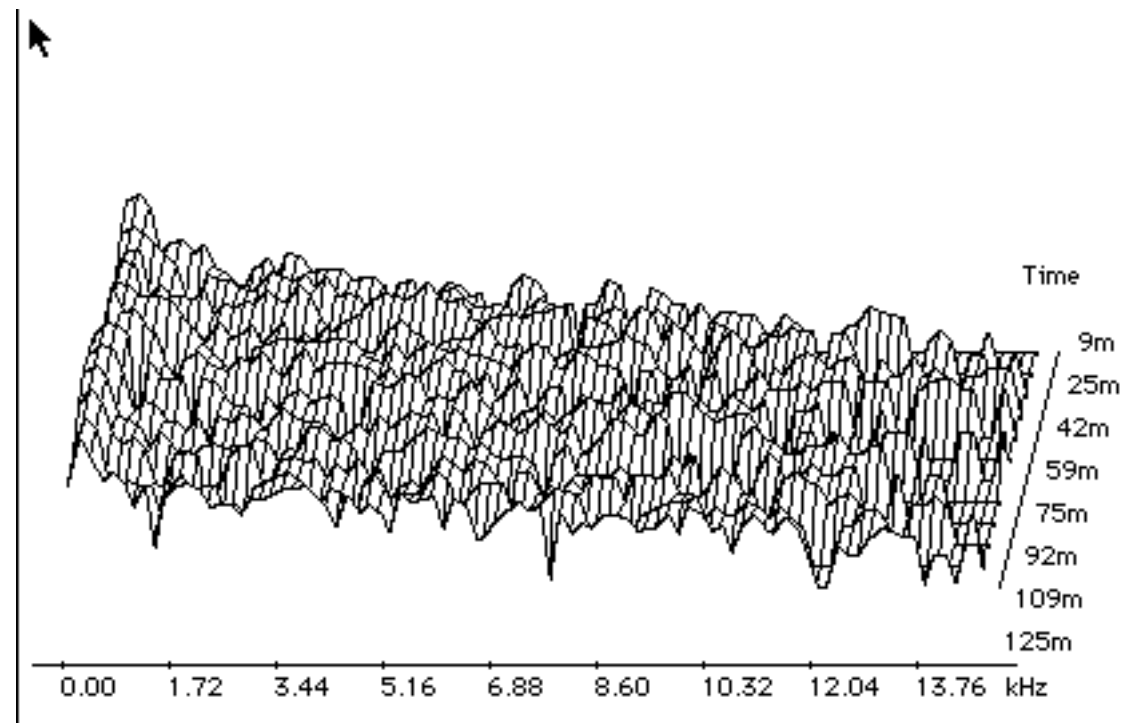
En acoustique on utilise une représentation a deux échelles de temps:

Le signal est échantillonne selon une période t

On calcule le spectre de l'échantillon considère comme un signal

Périodique (série de fourrier)

On presente sur un axe temporel la suite des spectres ainsi construits



Déformation d'un signal sur un canal

Tout dispositif physique (un H.P., Une oreille, une caisse de piano, une ligne de transmission)
Considère comme un canal de transmission déforme le signal transmis:

- Par filtrage (transformation du signal émis)
- Par addition de bruits (éléments exogènes)

Un effet de filtrage est souvent interprétable comme une transformation linéaire du spectre
(Convolution dans le domaine temporel)

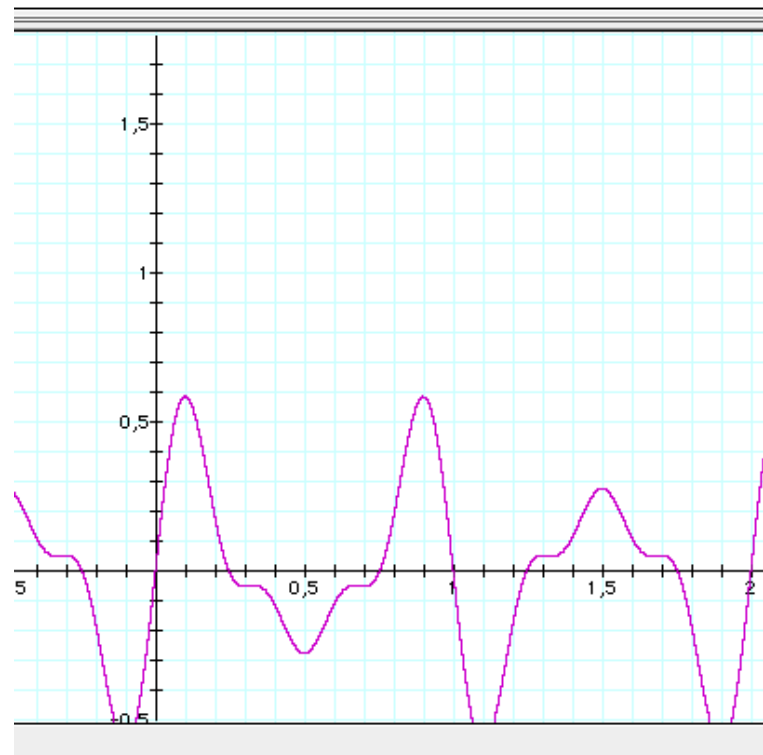
Principaux types de filtres simples:

- Passe haut: coupe les fréquences basses,
- Passe bas: coupe les fréquences hautes
- Passe bande: ne laisse passer que dans une gamme de fréquence

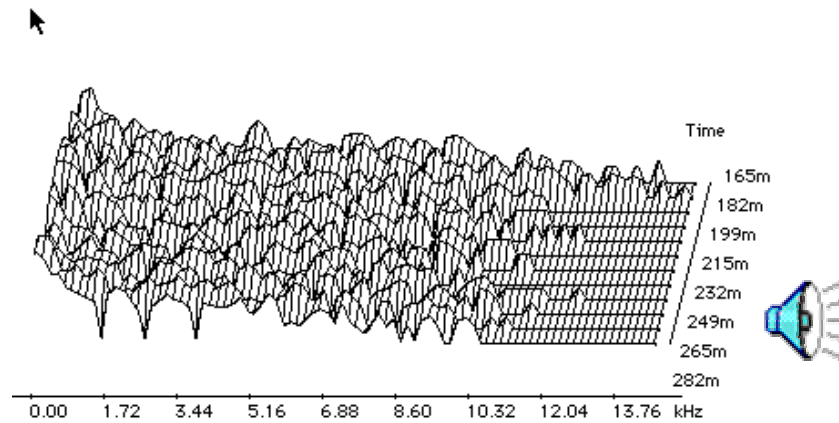
Exemple de filtre passe bande

filtre passe bande entre 3 et 7 fois la fondamentale du signal d'horloge

$$y = \frac{1}{3} \sin(3\pi x) + \frac{1}{5} \sin(5\pi x) + \frac{1}{7} \sin(7\pi x)$$



Filtrage numérique audio



Parametric EQ

Channel(s): Left
 Right
 Both

Soundfile:

Filter Type: **Low Shelf**

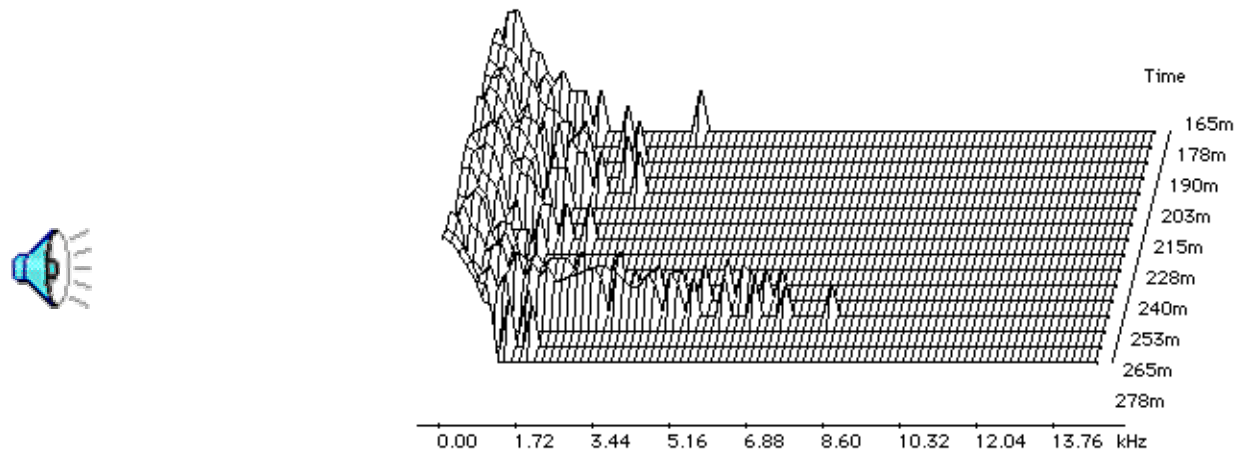
Sample Rate: 44100 Hz

Corner Freq. Hz

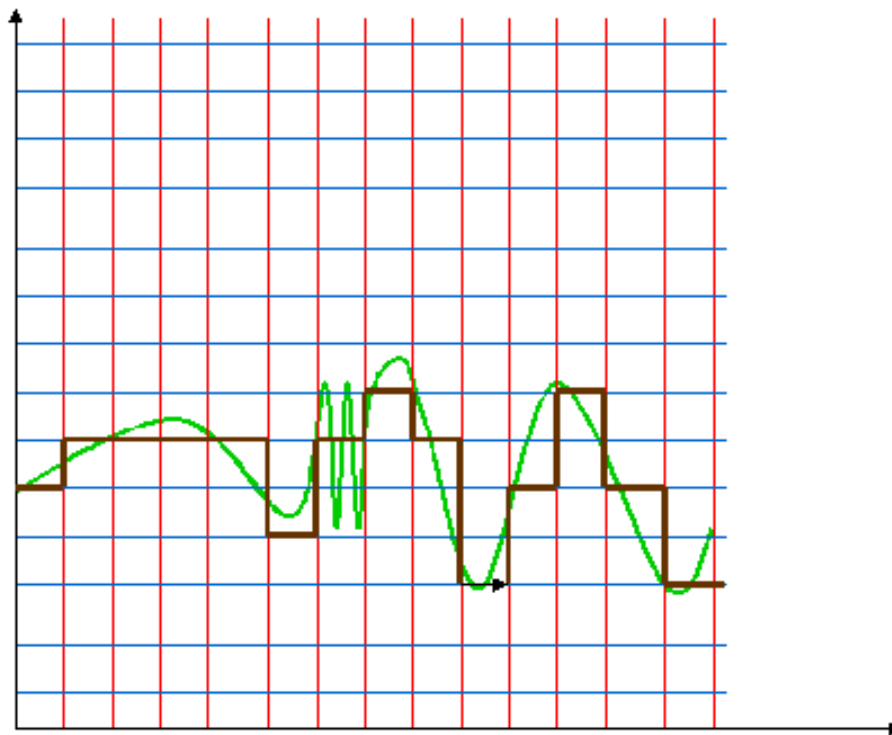
Boost/Cut: dB

Vol

Use for playback
 Bypass



Erreurs de quantification et d'échantillonnage



THEOREMES DE NYQUIST

La largeur de bande d'un filtre en **hertz** au travers duquel on transmet un signal

R - La rapidité de modulation en "**bauds**" Le nombre d'intervalles élémentaires par unité de temps (secondes) qui permettent l'échange d'informations.

V - La valence d'un signal échantillonné: le nombre de niveaux différents qui peuvent être distingués par intervalle.

Q - La quantité d'information par intervalle $Q = \log_2 V$ en "**bits**"

C - Le débit maximum d'informations en **bit/seconde**

$$C = R \log_2 V = 2 B \log_2 V$$

Pour un signal à support de largeur de bande B il ne sert à rien d'échantillonner plus de

$$R = 2B \text{ fois par unité de temps.}$$

Pour améliorer le débit il faut pouvoir augmenter V le nombre de niveaux.

Autre interprétation du théorème de Nyquist

- Soit un signal à bande limité dont la plus haute fréquence est f_n alors pour reconstituer le signal sans bruit d'échantillonnage il est nécessaire de l'échantillonner avec une fréquence d'au moins $2 * f_n$

THEOREMES DE SHANNON

Canal de bande passante limitée B.

- Puissance moyenne du signal S

- Puissance moyenne d'un bruit additif N.

Bruit blanc (énergie répartie de façon uniforme dans le spectre). Gaussien (l'apparition d'un bruit suit une loi de gauss)

On a
$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

Exemple: $B = 3100 \text{ Hz}$ $10 \log_{10} S/N = 20 \text{ db}$

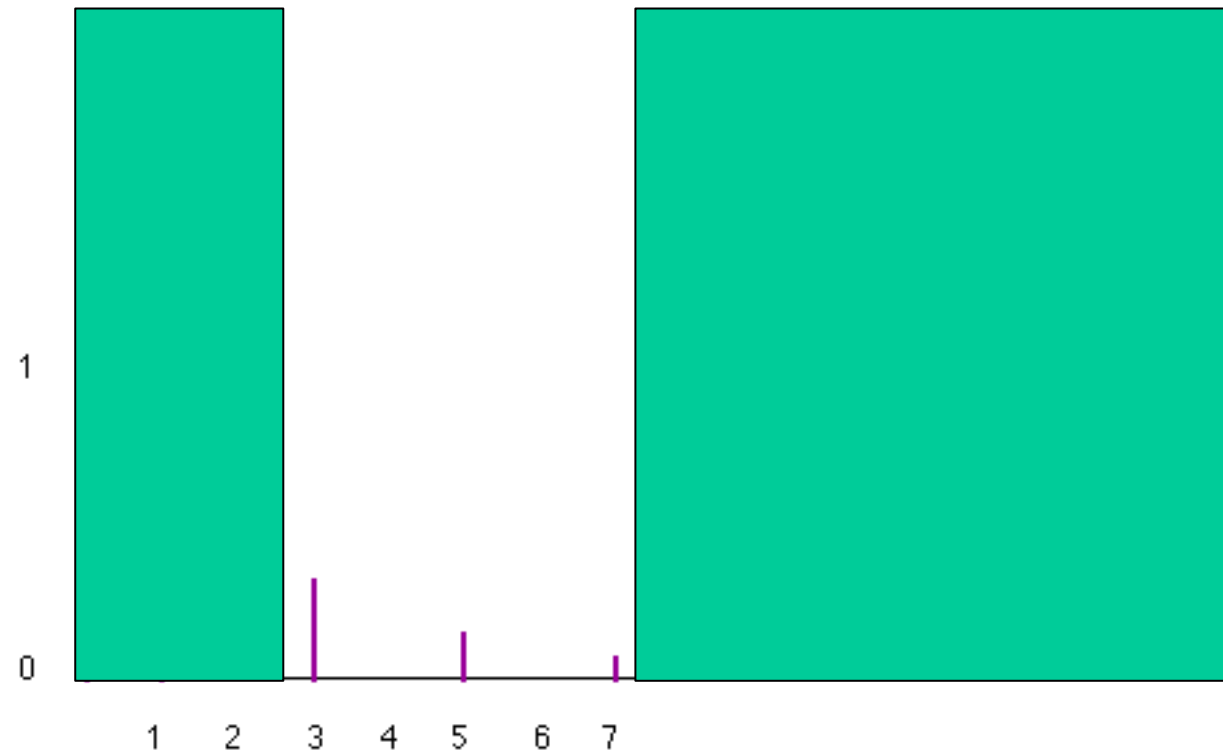
$S/N = 100$ $C = 3100 * 6,6 = 20600 \text{ b/s}$

Remarque: Dans ce cas Shannon montre que le nombre de niveaux max V qui peuvent être discriminés est donné par:

$$2B \log_2 V = B \log_2 (1 + S/N)$$

$$V = \sqrt{1 + S/N}$$

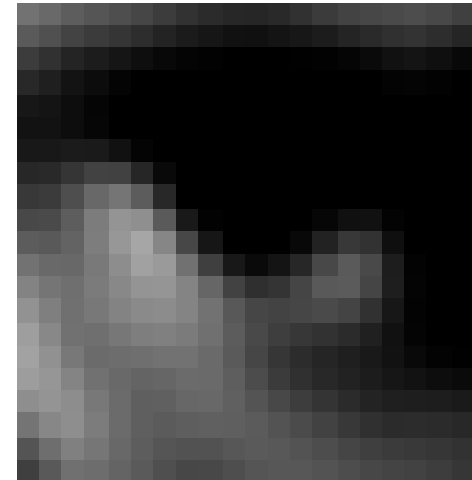
Exemple



L'image matricielle (bitmap)

- Numérisation d'une image plane sous forme d'une matrice de points (pixels)
- Résolution= Nombres de pixels/pouces (dpi)

Un écran 21 pouces (i.e. 53 cm de diagonale)
1024x768 points ou 1280x1024 points



Filtres d'analyse d'image

- Utilisés pour transformer ou sélectionner
- Dans le domaine temporel (cas le plus fréquent) ou fréquentiel (c.f. quantification JPEG)
- Linéaire ou non linéaires

$$S(n, m) = \sum_{i=1, k} (a_{n, i} \text{pixel}(n, m + i) + b_{n, i} \text{pixel}(n, m - i))$$

$$+ \sum_{j=1, t} (c_{j, m} \text{pixel}(n + j, m) + d_{j, m} \text{pixel}(n - j, m))$$

$$S'(n, m) = \text{Sup}_{i=-k, k} (\text{Sup}_{j=-t, t} \text{pixel}(n + i, m + j))$$

Filtres linéaires temporels

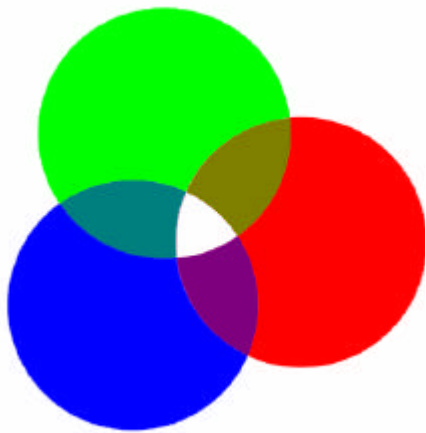
- Calcule une moyenne pondérée de la valeur des pixels sur une zone contiguë
- Passe bas: coefficients positifs, lisse l'image en valeur moyenne
- Passe haut: Coefficients négatifs, mettent en évidence les pixels atypiques
- Passe bande: ramènent la dynamique dans un plage définie

Exemple d 'application

- Passe haut: Sélection de forme par détection de seuil, on applique un filtre qui par comparaison avec un seuil permet de détecter les contours d 'une forme
- Passe bas: Calcul du réaffichage après diminution de la définition d 'une image
- Passe bande: Sélection d 'une zone par sa couleur

Effet de flous

Flou directionnel 57° , 30 pixels, une et trois itérations



Plage de couleurs

Sélection d'un gris, remplissage avec du blanc
tolérance 50



Moi, moi et moi plus ou moins bien conservé



14 Ko



7 Ko



6Ko

Bibliographie

- (AF) M. ALONSO, E.J. FINN, PHYSIQUE GENERALE TOME II, ED DU RENOUVEAU PEDAGOGIQUE, 1970
(JB) J.BURGER, THE DESKTOP MULTIMEDIA BIBLE, ADDISON - WESLEY, 1992
(JM) J.M. JOT, "SYNTHESIZING TREE DIMENSIONNAL SOUND SCENE
IN AUDIO AND MULTIMEDIA PRODUCTIONS AND INTERACTIVE
HUMAN COMPUTER INTERFACES, 5 CONF INTERFACES
DES MONDES REELS ET VIRTUELS, MONTPELLIER, MAI 1996
<http://mediatheque.ircam.fr/articles/>
(NB) H. BERRAUD, POUR COMPRENDRE LES MUSIQUES D'AUJOURD'HUI, SEUIL, 1972
(AH) A. HECQUET, L'ESPRIT MIDI, ID MUSIC 1989
(FB) F. BROWN, LA MUSIQUE PAR ORDINATEUR, QUE SAIS JE/PF, 1982
(CR) C. ROADS, L 'AUDION UMERIQUE, DUNOD 1998
(JW) J. WALKINSON, THE ART OF DIGITAL AUDIO, Focal Press 1989
(EM) E. R. MIRANDA: Computer dound synthesis for the electronic Musicain, Focal Press, 1998
(RB) R. BESSON, Sono et Prise de son, Dunod 1999

Glossaire:recordingeq.com/GlosPubAE.htm#sectA

Site IRCAM: www.ircam.fr