Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)
Sémantique et vérification

13 janvier 2009

1 Exercice

calculer :

1. $wp($`x :=x+y ;y :=x*y`$, x < y)$
2. $wp($ `if(x>y) x :=x+y+a ;y :=2*a-2*x else y :=y+2*x ;x :=x-y ;x :=x+y`$, x + y = a)$

Solution

1. $= wp($`x :=x+y`$, wp($`y :=x*y`$, x < y))$
   $= wp($`x :=x+y`$, x < x * y) = x + y < x * y$

2. $= wp($`if(x>y) x :=x+y+a ;y :=2*a-2*x else y :=y+2*x ;x :=x-y`$, wp($`x :=x+y`$, x + y = a))$
   $= wp($`if(x>y) x :=x+y+a ;y :=2*a-2*x else y :=y+2*x ;x :=x-y`$, x + y + y = a)$
   $= ((x > y) \wedge wp($`x :=x+y+a ;y :=2*a-2*x`$, x+y+y = a)) \vee (\neg(x > y) \wedge wp($`y :=y+2*x ;x :=x-y`$, x+y+y = a))$
   $= ((x > y) \wedge wp($`x :=x+y+a`$, (4 * a - 3 * x) = a)) \vee (\neg(x > y) \wedge wp($`y :=y+2*x`$, x + y = a))$
   $= ((x > y) \wedge x = y) \vee (\neg(x > y) \wedge 3 * x + y = a)$
   $= (\neg(x > y) \wedge 3 * x + y = a)$
   $= (x \leq y) \wedge y = a - 3 * x)$
   $= (x \leq a/4)$

2 Exercice

S etant une instruction dans un langage de programmation quelle est la relation (ie. implication, équivalence ...) entre les paires suivantes de prédicats.

1. $wp(S, p) \wedge wp(S, q)$ et $wp(S, p \wedge q)$
2. $wp(S, p) \vee wp(S, q)$ et $wp(S, p \vee q)$
3. $\neg wp(S, p)$ et $wp(S, \neg p)$

Solution

1. $wp(S,p) \wedge wp(S,q) \Leftrightarrow wp(S,p \wedge q)$

   - $\rightarrow$
     Soit e un état arbitraire dans lequel $wp(S,p) \wedge wp(S,q)$ est vrai, alors $wp(S,p)$ et $wp(S,q)$ sont vrai tout les deux pour cet état. Donc l'instruction S conduit à un nouvel état e' dans lequel p et q sont vrai, et donc $p \wedge q$ est vrai. Comme e est arbitraire on a montré :
     $$\{e| \models wp(S,p) \wedge wp(S,q)\} \sqsubset \{e| \models wp(S,p \wedge q)\}$$
     donc
     $$\models wp(S,p) \wedge wp(s,q) \rightarrow p(S,p \wedge q)$$
   - $\leftarrow$
     Soit e un état arbitraire dans lequel $wp(S,p \wedge q)\}$ est vrai. L'instruction S conduit à un état ou $p \wedge q$ est vrai et donc ou p est vrai et ou q est vrai. Comme e est arbitraire on a montré :
     $$\{e| \models wp(S,p \wedge q)\} \sqsubset \{e| \models wp(S,p) \wedge wp(S,q)\}$$
     donc
     $$\models p(S,p \wedge q) \rightarrow wp(S,p) \wedge wp(s,q)$$