Spécification et Modélisation Informatiques (NFP108)
Logique des predicats et modélisation ensembliste

13 janvier 2009

1 Exercice

Montrer : $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Solution

Il est assez fréquent de montrer des énoncés universels en procédant par l'absurde. C'est ce que nous allons faire.

Supposons $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ (h1) et $\forall x P(x)$ (h2) et montrons $\forall x Q(x))$
Raisonnons par l'absurde : supposons $\neg \forall x Q(x)$, c'est à dire $\exists x \neg P(x)$ et montrons qu'on arrive à une contradiction.
Nommons z l'individu ne vérifiant pas Q. On a donc $\neg Q(z)$ (h3).
Par instanciation de h2 sur z on a $P(z)$ (h4).
Par instanciation de h1 sur z on a $P(z) \rightarrow Q(z)$ (h5).
Donc, par Modus Ponens (élimination de l'implication, règle $\rightarrow_e$ de la déduction naturelle) on a $Q(z)$ ce qui contredit h3.

2 Exercice

Montrer : $\forall x(\exists y Q(x,y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x \forall y(Q(x,y) \rightarrow P(x))$

Solution

Nous allons faire une preuve directe.
Supposons $\vdash \forall x(\exists y Q(x,y) \rightarrow P(x))$ (h1) et montrons $\forall x \forall y(Q(x,y) \rightarrow P(x))$. Soient a, b et c ; Montrons $Q(a,b) \rightarrow P(a)$.
Supposons $Q(a,b)$ (h2) et montrons $P(a)$.
Comme h2 est vraie, on a aussi $\exists y Q(a,y)$ (h3). Par instanciation de h1 sur a on a : $\exists y Q(a,y) \rightarrow P(a)$ (h4), donc on déduit $P(a)$ par Modus Ponens (élimination de l'implication, règle $\rightarrow_e$ de la déduction naturelle).

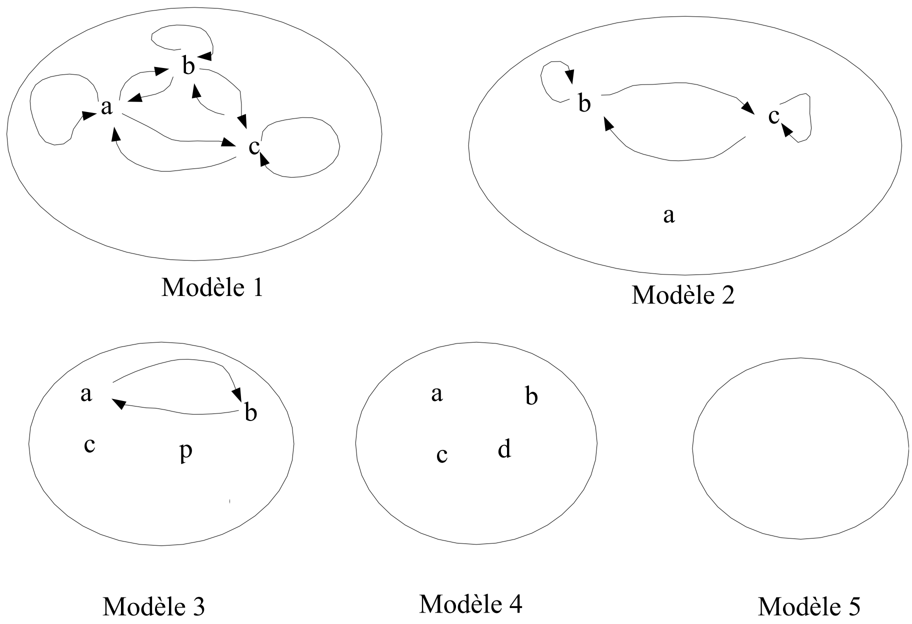

FIG. 1 – Modèles pour l'exercice 2

3 Exercice

On se pose la question de savoir si le fait qu'une relation soit symétrique (A) et transitive (B) implique qu'elle soit aussi reflexive (C). Ce n'est pas le cas, et les modèles de la figure 1 permettent de comprendre pourquoi. Le but de cet exercice est d'ajouter une condition supplémentaire (D) telle que $A \wedge B \wedge D \rightarrow C$

1. traduire en calcul des prédicats les phrases suivantes :
   – R est symetrique(A)
   – R est transitive (B)
   – R est reflexive (C)
   en modélisant la relation binaire R par un prédicat binaire $R()$.
2. parmis ces modèles, lesquels rendent vrais A et B ?
3. même question pour C .
4. même question pour $(A \wedge B) \rightarrow C$.
5. Expliquer ce qui se passe pour les modèles 2 4 et 5
6. Compléter la formule suivante pour qu'elle soit valide. $A \wedge B \wedge \ldots \rightarrow C$
7. Démontrer cette nouvelle formule

Solution

1. – $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$(A)
   – $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$(B)
   – $\forall x R(x, x)$ (C)
2. 1,2 ,4 et 5 rendent vraies A et B. Le modèle 3 ne verifie pas la transitivité.
3. Seul 1 rend vraie C
4. 1 et 3 rendent vraie $(A \wedge B) \rightarrow C$.

5. Dans 2 4 et 5, la relation est transitive et symetrique mais pas reflexive. Ceci est du au fait que la relation R ne concerne pas tous les éléments de l'ensemble.
6. Il suffit donc d'ajouter le fait que tous les éléments sont touchés par la relation : $A \wedge B \wedge \forall x \exists y(R(x,y) \vee R(y,x)) \rightarrow C$ En fait il suffit d'ajouter que tous les éléments de l'ensemble sont dans le domaine de R (on dit que la relation est totale). $\forall x \exists y R(x,y)$
7. Soit R symetrique, transitive et totale. Soit e un individu quelconque. Montrons que $R(e,e)$. R est totale donc $\exists y R(e,y)$. Appelons f l'individu tel que $R(e,f)$. Comme R est symetrique on a $R(f,e)$. Comme elle est aussi transitive, le fait d'avoir $R(e,f)$ et $R(f,e)$ implique qu'on ait aussi $R(e,e)$, ce qui était le but de notre démonstration.

4 Exercice

On veut modèliser le fonctionnement d'une bibliothèque : On observe les règles suivantes :

1. Un exemplaire est toujours associé à un livre. Celui ci est unique.
2. Un même exemplaire de livre ne peut etre emprunté par différents abonnées.
3. Un même abonnée ne peut emprunter plus d'un exemplaire d'un même livre

Formaliser ces règles en **Calcul des prédicats**.

Solution

On se donne :
$Ex(\_)$(etre un exemplaire),
$L(\_)$ (etre un livre)
$A(\_)$ (etre un abonné)
$Emp(a,e)$ (a emprunte l'exemplaire e) et
$Exde(e,l)$ (e est un exemplaire du livre l)

1. $\forall e(Ex(e) \rightarrow \exists! y(L(y) \wedge Exde(e,l)))$
2. $\forall e, aa, ab(Ex(e), A(aa), A(ab), Emp(aa,e) \wedge Emp(ab,e) \rightarrow aa = ab)$
3. Si deux exemplaires sont empruntés par un même abonnés, ils concernent des livres différents : $\forall ea, eb((Ex(ea) \wedge Ex(eb) \wedge ea \neq eb \wedge \exists a(A(a) \wedge Emp(a,ea) \wedge Emp(a,eb))) \rightarrow \forall la, lb(Exde(ea,la) \wedge Exde(eb,lb) \wedge L(la) \wedge L(lb) \rightarrow la \neq lb))$

5 Exercice

On veut modèliser le fonctionnement d'une bibliothèque : On observe les règles suivantes :

1. Un exemplaire est toujours associé à un livre. Celui ci est unique.
2. Un même exemplaire de livre ne peut etre emprunté par différents abonnées.
3. Un même abonnée ne peut emprunter plus d'un exemplaire d'un même livre

Formaliser ces règles en **théorie des ensembles.**

Solution

On se donne :
3 ensembles :
Ex (exemplaires),
L (livres)
A (abonnés)
et 2 relations :
Emp entre A et EX
Exde entre Ex et L

1. $Exde \in Ex \rightarrow L$
2. $Emp \in Ex \mapsto A$
3. Construisons la relation (e, (a,l)) reliant un exemplaire emprunté à son emprunteur et au livre qu'il référence. :
   $f \stackrel{\text{def}}{=} \{(e,(a,l))/e \in E \wedge a \in A \wedge l \in L \wedge (e,a) \in Emp \wedge (e,l) \in Exde\}$. Cette relation est une fonction car un exemplaire ne peut etre relié à deux couples (aa,la) (ab,lb) différents du fait que Emp et Exde sont des fonctions de domaine Ex. Il suffit d'imposer que notre fonction soit de plus injective : 2 exemplaires differents ne peuvent etre relies a un même couple (a,l) ie ne peuvent etre des exemplaires du même livre emprunté par le même abonné :
   $f \in Ex \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!+ (A \times L)$