Logique, mathématiques et Informatique

O. Pons and M. Simonot

12 décembre 2007

Chapitre 1

Déduction

1.1 Règles de la déduction naturelle

Le langage est constitué de jugement de la forme $\Gamma \vdash \phi$, ou Γ désigne un ensemble fini de formule et ϕ une formule du calcul propositionnel.

Intuitivement : $\Gamma \vdash \phi$ se lit :" on peut démontrer ϕ à partir des formule de Γ".

Axiomes

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\, Ax$$

Il y a ensuite deux groupe de règles :

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma, \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\, \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\, \Rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\, \vee_{i1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\, \vee_{i2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \perp}\, \perp_i$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\, \wedge_{e2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\, \wedge_{e1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\, \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\, \vee_{e1}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi}\, \perp_e$$

Le connecteur $\neg\phi$ est une abréviation pour $\phi \Rightarrow \perp$. Il satisfait donc aussi aux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\phi}\, \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \psi}\, \neg_e$$

1.2 Règles du calcul des sequents

En calcul des sequents, on peut éliminer des quantificateurs à droite et à gauche. Le langage est constitué de jugements de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ ou Γ et Δ désignent des ensembles de formules. Intuitivement une virgule à gauche à un sens "et" et a droite le sens "ou". Le sens de $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_n$ est qu'avec $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ on prouve $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m$

Les axiomes sont les jugements $\Gamma \vdash \Delta$ pour lesquels les ensembles de formules Γ et Δ ont une intersection non vide.

Règles d'elimination à gauche

$$\frac{\Gamma, \phi_1, \phi_2, \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Delta} \wedge_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1, \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vdash \Delta} \Rightarrow_d$$

$$\frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \Delta} \vee_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta} \perp_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \neg \phi \vdash \Delta} \neg_g$$

Règles d'élimination à droite

$$\frac{\Gamma \vdash \psi_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta} \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, \psi_1 \vdash \psi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2, \Delta} \Rightarrow_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi_1, \psi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \psi_1 \vee \psi_2, \Delta} \vee_d$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp_d$$

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \psi, \Delta} \neg_d$$